

PRINCIPERNA

FÖR

NORMAL KLANGFÄRG OCH KLANGFÖRVANDTSKAP.

AKADEMISK AFHANDLING,

SOM

MED VIDTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETENS I LUND TILLSTÅND

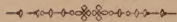
KOMMER ATT OFFENTLIGEN FÖRSVARAS

AF

ASTOLF MOZART MÖLLER

TISDAGEN DEN 14 DECEMBER 1875, KL. 10 F. M.,

PÅ AUDITORIUM N:o 1.



LUND 1875.

FR. BERLINGS BOKTRYCKERI OCH STILGJUTERI.

H. L. F. HELMHOLTZ,

Professor i Fysik vid Universitetet i Berlin, Geheime-Råd m. m.,

med vördnad och tacksamhet

tillegnad

af

författaren.

§. 1.

Det är en känd sak, att man redan för lång tid tillbaka hade sig bekant, att många ljudande kroppar kunde frambringa icke allenast grundtonen utan äfven flera andra och ännu högre, så kallade *öfvertoner* eller *harmoniska toner*; men man begrep icke då, hvilket inflytande dessa toner hafva på *klangfärgen* och *klangförvandtskapen*. SAUVEUR är den förste, som kallat sådana toner *harmoniska*, hvilka gjorde 2, 3, 4, 5 etc. gånger så många svängningar i sekunden som deras grundton, med hvilken de således bilda vår naturliga talserie 1, 2, 3, 4, 5 etc., hvarest talet 1 uttrycker grundtonens svängningstal.

Gifva vi, i likhet med HELMHOLTZ *), alla de toner, som en klang innehåller, benämningen *partialtoner*, så är första partialtonen grundton och alla de öfriga öfvertoner; följaktligen är 1:sta, 2:dra, 3:dje etc. öfvertonen likbetydande med 2:dra, 3:dje, 4:de etc. partialtonen **). Man benämner öfvertonerna i den ordning, de följa på hvarandra, *Oktav*, *Duodecima*, *Dubbel-oktav*, *Stor ters*, *Qvint* och *Septima* (akustiska) till *dubbeloktaven* o. s. v.

Härvid bör dock anmärkas, att, alldenstund vårt nuvarande s. k. *naturliga* tonsystem grundar sig endast på talen 2, 3, 5, vi icke kunna exakt, utan endast approximativt, benämna och beteckna alla de partialtoner uti en musikalisk klang, hvilkas ordningstal innehålla andra än dessa trenne primtal såsom faktorer; följaktligen kunna icke dessa toner ingå uti ofvannämnda tonsystem. Ännu ofullkomligare framställer sig det *pythagoreiska*- eller så kallade *rena qvintsystemet*, ty här saknas dessutom alla de partialtoner, hvilkas ordningstal innehålla talet 5 såsom faktor. Det oaktadt hafva i nyare tider DROBISCH ***) och NAUMANN †) genom sina undersökningar angående den liksväfvande temperaturen försvarat detta tonsystem.

*) Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig, 1870 (Dritte umgearbeitete Ausgabe).

**) Bland alla partialtonerna är således den första eller grundtonen den djupaste och i regeln också den kraftigaste, hvarföre vi efter dess tonhöjd bedöma hela klangens tonhöjd.

***) Nachträge zur Theorie der musikalischen Tonverhältnisse. Leipzig, 1855.

†) Ueber die verschiedenen Bestimmungen der Tonverhältnisse und die Bedeutung des pythagoräischen oder reinen Quintensystems für unsere heutige Musik. Leipzig, 1858.

DROBISCH kommer slutligen till följande resultat: "die von ZARLINO begründete und von den Akustikern anerkannte diatonische Tonleiter kann für unsre heutige Musik nicht als maassgebend, sondern nur als exceptionell gelten, und alle darauf gebaute Systeme sind für diese Musik weder in theoretischer noch in praktischer Beziehung brauchbar; das normative System derselben ist vielmehr das reine Quintensystem, also das alte pythagoreische." Han vill således grunda musikens teori på det pythagoreiska systemet; men på den ståndpunkt, vi nu kommit genom HAUPTMANN'S, HELMHOLTZ'S och OETTINGENS undersökningar, måste vi obetingadt sluta oss till det naturliga systemet af skäl, som i det följande lätt inses.

§. 2.

Till en början vilja vi nu visa, huru man genom ett enkelt beteckningssätt kan framställa de partialtoner i en klang, hvilka tillhöra det naturliga tonsystemet, hvarigenom man, med afseende på den olika stämningen, lätt och säkert kan skilja emellan vissa toner i detta och det pythagoreiska (rena qvint-) systemet; en skillnad, som man nödvändigt måste göra vid theoretiska undersökningar, oaktadt man uti den moderna musiken i allmänhet icke praktiskt iakttagit densamma.

Vi utgå från en viss ton, c^0 , och beteckna denna tons på hvarandra följande *öfveroktaver* med c^1, c^2, c^3, c^4 o. s. v., och *underoktaver* med c_1, c_2, c_3, c_4 o. s. v. Låt vidare talet 1 representera utgångstonens c^0 svängningstal eller ordningstal, så kunna vi uttrycka svängningstalen till *öfver-* och *underoktaverna* på följande sätt:

$$\dots\dots c_5 - c_4 - c_3 - c_2 - c_1 - c^0 - c^1 - c^2 - c^3 - c^4 - c^5 \dots\dots$$

$$2^{-5} \quad 2^{-4} \quad 2^{-3} \quad 2^{-2} \quad 2^{-1} \quad 1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5$$

alltså betecknar 2^x , hvarest x är ett pos. eller neg. helt tal, svängningstalet till hvilken oktav som helst till c^0 .

Emedan talet 3 är svängningstalet till tredje partialtonen eller duodeciman (summan af en oktav och en ren qvint), så erhålla vi en ny tonserie genom att taga successiva *öfver-* och *underduodecimer* till c^0 :

$$\dots {}^b d_8 - {}^b a_7 - {}^b e_6 - {}^b h_4 - f_2 - c^0 - g^1 - d^3 - a^4 - e^6 - h^7 - \sharp f^9 \dots$$

$$3^{-5} \quad 3^{-4} \quad 3^{-3} \quad 3^{-2} \quad 3^{-1} \quad 1 \quad 3 \quad 3^2 \quad 3^3 \quad 3^4 \quad 3^5 \quad 3^6$$

Anm. Bokstafven b framför ett tontecken betyder en sänkning och tecknet $\sharp$ en höjning med en liten sekund (*pythagoriskt Apotome*).

Allmänna uttrycket för duodecimans svängningstal kunna vi således beteckna med 3^y .

Taga vi nu på samma sätt successiva *öfver-* och *underduodecimer* till hvilken som helst af tonens c^0 *öfver-* och *underoktaver*, så blir allmänna uttrycket för svängningstalen till alla sålunda uppkomna toner:

$$2^x \cdot 3^y,$$

hvarest x och y äro alla möjliga hela tal (pos. eller neg.) eller 0.

Taga vi, i stället för duodecimer, successiva *öfver-* och *underqvinter* till c^0 , så erhålles, emedan qvintens svängningstal är $3/2$, följande qvintserie:

$$\dots {}^b d_3 - {}^b a_3 - {}^b e_2 - {}^b h_2 - f_1 - c^0 - g^0 - d^1 - a^1 - e^2 - h^2 - \sharp f^3 \dots$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} 1 \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\frac{3}{2}\right)^5 \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

alltså är allmänna uttrycket för qvintens svängningstal $(3/2)^y$. Bilda vi dylika qvintserier till tonens c^0 öfver- och underoktaver, så blir slutligen allmänna uttrycket för svängningstalen:

$$2^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y = 2^{x-y} \cdot 3^y,$$

som, jemfördt med det förut funna $2^x \cdot 3^y$, utvisar, att ej i sjelfva verket nya toner härigenom uppkommit, utan att endast oktavförflyttningar ägt rum.

Det tonsystem, som innefattar alla dessa toner, är det förut omnämnda (§. 1) *pythagoreiska* eller så kallade *rena qvintsystemet*.

Genom att förflytta hufvudtonerna i detta system inom omfånget af *en* oktav, t. ex. $c^0 - c^1$, uppkommer den *pythagoreiska tonskalan*:

$$c^0 - d^0 - e^0 - f^0 - g^0 - a^0 - h^0 - c^1$$

svängningstal: $1 \quad \frac{3^2}{2^3} \quad \frac{3^4}{2^6} \quad \frac{2^2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3^3}{2^4} \quad \frac{3^5}{2^7} \quad 2$

intervaller: $\frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243}$

Anm. I det pythagoreiska systemet inträffar den egenheten, att de höjda tonerna $\sharp c^0, \sharp d^0, \sharp f^0, \sharp g^0, \sharp a^0$ ligga högre än de närmast belägna och nedsänkta tonerna ${}^b d^0, {}^b e^0, {}^b g^0, {}^b a^0, {}^b h^0$. Ty genom förflyttning inom oktaven äro de förras svängningstal:

$$\sharp c^0 = \frac{3^7}{2^{11}}, \sharp d^0 = \frac{3^9}{2^{14}}, \sharp f^0 = \frac{3^6}{2^9}, \sharp g^0 = \frac{3^8}{2^{12}}, \sharp a^0 = \frac{3^{10}}{2^{15}}$$

och de sednares:

$${}^b d^0 = \frac{2^8}{3^5}, {}^b e^0 = \frac{2^5}{3^3}, {}^b g^0 = \frac{2^{10}}{3^6}, {}^b a^0 = \frac{2^7}{3^4}, {}^b h^0 = \frac{2^4}{3^2},$$

hvaraf:

$$\frac{\sharp c^0}{{}^b d^0} = \frac{\sharp d^0}{{}^b e^0} = \frac{\sharp f^0}{{}^b g^0} = \frac{\sharp g^0}{{}^b a^0} = \frac{\sharp a^0}{{}^b h^0} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} > 1.$$

Det lilla intervallet $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ är ett så kalladt *pythagoriskt komma*.

Införa vi nu femte partialtonen (summan af två oktaver och en stor ters), som representeras genom talet 5, så erhålles återigen en ny tonserie. Men emedan nya toner härigenom uppkomma, så måste man också hafva särskilda tecken för att uttrycka desamma. För detta

ändamål uppfann HAUPTMANN *) ett lämpligt beteckningssätt, som sedermera förbättrades af HELMHOLTZ **) och OETTINGEN ***), och som genom sin enkelhet är af stor vikt för harmoniernas åskådliggörande. Jemföres t. ex. fjerde öfverqvinten e^2 (till c^0) med femte partialtonen i den klang, hvars grundton är c^0 , så uppkommer en märkbar skillnad i tonhöjd. Ty enligt det föregående är svängningstalet till $e^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$ och till femte partialtonen talet 5; alltså uppstår emellan dessa toner ett litet intervall (*syntoniskt komma*), hvars svängningstal är $\frac{81}{16} : 5 = \frac{81}{80}$ och som utvisar, huru mycket den förra tonen ligger högre än den sednare.

För att nu beteckna femte partialtonen, som således ligger ett syntoniskt komma $\left(\frac{81}{80}\right)$ under fjerde öfverqvinten e^2 , så skrifver HELMHOLTZ $\underline{e^2}$, hvarest det horisontela strecket under e^2 antyder nämnda sänkning. Tages vidare femte partialtonen till $\underline{e^2}$, d. v. s. tjugofemte partialtonen till c^0 , så beteckna vi den med $\sharp \underline{g^4}$; ty fjerde öfverqvinten till $\underline{e^2}$ är $\sharp \underline{g^4}$, som, nedsänkt ett syntoniskt komma, förvandlas till $\sharp \underline{g^4}$.

Emedan fjerde underqvinten till c^0 är $^b a_3$, så måste vi höja $^b a_3$ med ett syntoniskt komma, för att bekomma ett intervall $\dagger$), som ligger lika mycket under c^0 som $\underline{e^2}$ ligger öfver densamma. I detta fall öfvergår $^b a_3$ till $^b \bar{a}_3$ (enligt HELMHOLTZ's beteckning), hvarest det horisontela strecket öfver $^b a_3$ betecknar en höjning med ett syntoniskt komma. Taga vi ytterligare ett sådant intervall under $^b \bar{a}_3$, så erhålla vi konsekvent tonen $^b \bar{f}_5$, som alltså är tjugofemte underpartialtonen till c^0 .

Hvarje horisontelt streck under eller öfver den bokstaf, som utmärker en gifven ton, betyder således en sänkning eller höjning med ett syntoniskt komma $\dagger\dagger$).

Genom att successift taga femte öfver- och underpartialtonen till c^0 , erhålla vi följande tonserie:

$$\dots \overset{\equiv}{\overset{\equiv}{\overset{\equiv}{b b b} h}}_{10} - \overset{\equiv}{\overset{\equiv}{b b} d}_7 - \overset{\equiv}{\overset{\equiv}{b} f}_5 - \overset{\equiv}{\bar{a}}_3 - c^0 - \underline{e^2} - \sharp \underline{g^4} - \sharp \overset{\equiv}{h^6} - \sharp \sharp \overset{\equiv}{d^9} \dots$$

$$5^{-4} \quad 5^{-3} \quad 5^{-2} \quad 5^{-1} \quad 1 \quad 5 \quad 5^2 \quad 5^3 \quad 5^4.$$

Allmänna uttrycket för dessa svängningstal kunna vi således beteckna med 5^z .

*) Die Natur der Harmonik und der Metrik. Leipzig, 1873 (zweite Auflage).

**) Die Lehre von den Tonempfindungen.

***) Harmoniesystem in dualer Entwicklung. Dorpat und Leipzig, 1866.

†) Detta intervall kunna vi benämna femte underpartialtonens till c^0 .

††) HELMHOLTZ anmärker, att detta beteckningssätt är upfunnet af OETTINGEN, som likväl deråt gifver en rakt motsatt betydelse.

Minskas dessa intervaller oupphörligt med två oktaver, så uppkommer alldeles samma tonserie, som då man successift tager akustiskt rena *öfver-* och *underterser* till c^0 :

$$\dots \overset{\equiv}{\overset{\equiv}{\overset{\equiv}{b b b} h_2}} - \overset{\equiv}{\overset{\equiv}{\overset{\equiv}{b b} d_1}} - \overset{\equiv}{\overset{\equiv}{f_1}} - \overset{\equiv}{\overset{\equiv}{a_1}} - c^0 - \overset{\equiv}{e^0} - \overset{\equiv}{\# g^0} - \overset{\equiv}{\# h^0} - \overset{\equiv}{\#\# d^1} \dots$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-4} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \quad 1 \quad \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3 \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4$$

alltså är allmänna uttrycket för dessa toners svängningstal $\left(\frac{5}{4}\right)^z$.

Taga vi slutligen successift femte öfver- och underpartialtonen till hvilken ton som helst uti det pythagoreiska systemet, så blir allmänna uttrycket för svängningstalen till alla sålunda uppkomna toner:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z,$$

hvarst x, y, z beteckna alla möjliga hela tal (positiva eller negativa) eller 0.

§. 3.

Det tonsystem, till hvilket vi nu kommit och som egentligen är en kombination af *rena qvint-* och *tersserier*, är vårt nuvarande så kallade *naturliga* eller *akustiska tonsystem*. Det grundar sig uteslutande på primtalen 2, 3 och 5.

Emedan stora tersen $\overset{\equiv}{e^0}$ i detta system är två oktaver lägre än femte partialtonen, från c^0 räknadt, och i följe deraf akustiskt ren, så måste vi noga skilja mellan denna och pythagoreiska stora tersen e^0 , hvilken sednare deremot är två oktaver lägre än fjerde öfverqvinten eller, med andra ord, 6 oktaver lägre än 84:sta partialtonen till c^0 .

Inskjuta vi alltså rena *öfver-* och *underterser* uti den förut funna qvintserien:

$$\dots \overset{\equiv}{b a_3} - \overset{\equiv}{b e_2} - \overset{\equiv}{b h_2} - f_1 - c^0 - g^0 - d^1 - a^1 - e^2 \dots$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \quad 1 \quad \frac{5}{2} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^4$$

så uppkomma följande tvenne, af rena qvinter och terser härledda, serier, hvilka bestå af omvexlande stora och små terser:

$$A. \left\{ \begin{array}{l} \dots \overset{\equiv}{c_2} - \overset{\equiv}{g_2} - \overset{\equiv}{d_1} - \overset{\equiv}{a_1} - \overset{\equiv}{e^0} - \overset{\equiv}{h^0} - \overset{\equiv}{\# f^1} - \overset{\equiv}{\# c^2} \dots \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \frac{5}{4} \\ \dots \overset{\equiv}{b a_3} - \overset{\equiv}{b e_2} - \overset{\equiv}{b h_2} - f_1 - c^0 - g^0 - d^1 - a^1 \dots \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \quad 1 \quad \frac{5}{2} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \end{array} \right.$$

$$\text{B.} \left\{ \begin{array}{l} \dots \bar{f}_3 \quad - \quad \bar{c}_2 \quad - \quad \bar{g}_2 \quad - \quad \bar{d}_1 \quad - \quad \bar{a}_1 \quad - \quad \bar{e}^0 \quad - \quad \bar{h}^0 \quad - \quad \bar{f}^1 \quad \dots \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \\ \dots \quad \bar{a}_3 \quad - \quad \bar{e}_2 \quad - \quad \bar{h}_2 \quad - \quad f_1 \quad - \quad c^0 \quad - \quad g^0 \quad - \quad d^1 \quad - \quad a^1 \quad \dots \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \quad 1 \quad \frac{5}{2} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \end{array} \right.$$

Anm. I stället för att insätta terserna emellan qvintseriens toner hafva vi, för utrymmes vinnande, ställt dem, såsom varande *öfverterser*, snedt öfver till *höger* uti serien A och, såsom varande *underterser*, snedt öfver till *venster* uti serien B.

Jemföra vi dessa båda serier med hvarandra, så finna vi, att en viss *symmetri* äger rum, bestående deri, att alla öfver eller under c^0 liggande toner uti serien A hafva samma afstånd från denna utgångston, som de motsvarande, men i omvänd ordning tagna, tonerna uti serien B; eller med andra ord: *den förra seriens högra del är symmetrisk med den sednares venstra, och tvärtom*. Deremot äro hvardera seriens båda delar sins emellan *kongruenta*. I stället för benämningarne *symmetri* och *kongruens* använda vi heldre *reciprocitet* och *parallelitet*, af hvilka den förra uttrycker samma slags tersrörelse i *motsatt* och den senare i *samma* riktning.

Betrakta vi de båda serierna A och B något närmare, så finna vi dessutom, att de hvar för sig innehålla tvenne olika qvintserier, af hvilka dock *en* är gemensam, nemligen den, som har c^0 till utgångston.

Den nya qvintserien i A, som uppkommer genom de inskjutna *öfverterserna*, är:

$$\dots \underline{c}_2 \quad - \quad \underline{g}_2 \quad - \quad \underline{d}_1 \quad - \quad \underline{a}_1 \quad - \quad \underline{e}^0 \quad - \quad \underline{h}^0 \quad - \quad \sharp f^1 \quad - \quad \sharp c^2 \quad - \quad \sharp g^2 \quad \dots$$

uti hvilken vi nu betrakta $\underline{e}^0$ (*stora **) *öfvertersen* till c^0) såsom utgångston; den nya qvintserien i B, som uppkommer genom de inskjutna *underterserna*, är:

$$\dots \bar{f}_3 \quad - \quad \bar{c}_2 \quad - \quad \bar{g}_2 \quad - \quad \bar{d}_1 \quad - \quad \bar{a}_1 \quad - \quad \bar{e}^0 \quad - \quad \bar{h}^0 \quad - \quad \bar{f}^1 \quad - \quad \bar{c}^2 \quad \dots$$

uti hvilken vi betrakta $\bar{a}_1$ (*stora undertersen* till c^0) såsom utgångston.

Inskjuta vi nu på samma sätt som förut stora *öfverterser* **) i den *förra* och stora *underterser* i den *sednare* af dessa qvintserier, så uppkomma följande nya, af omvexlande stora och små terser sammansatta, serier:

$$\text{C.} \left\{ \begin{array}{l} \dots \underline{e}_2 \quad - \quad \underline{h}_2 \quad - \quad \sharp f_1 \quad - \quad \sharp c^0 \quad - \quad \sharp g^0 \quad - \quad \sharp d^1 \quad - \quad \sharp a^1 \quad - \quad \sharp e^2 \quad \dots \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\ \dots \underline{c}_2 \quad - \quad \underline{g}_2 \quad - \quad \underline{d}_1 \quad - \quad \underline{a}_1 \quad - \quad \underline{e}^0 \quad - \quad \underline{h}^0 \quad - \quad \sharp f^1 \quad - \quad \sharp c^2 \quad \dots \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{5}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \frac{5}{4} \end{array} \right.$$

*) Emedan rena qvintintervallet, t. ex. $c^0 - g^0$, består af en stor ters, $c^0 - \underline{e}^0$, och en liten ters, $\underline{e}^0 - g^0$, så vilja vi i det följande använda benämningen *stora* (i st. f. rena) tersen.

**) Inskjuta vi deremot stora *underterser* i den *förra* och stora *öfverterser* i den *sednare*, så återkomma vi till serierna A och B.

$$\text{D.} \left\{ \begin{array}{l} \dots \bar{\bar{b}}\bar{\bar{d}}_3 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{a}}_3 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{e}}_2 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{h}}_2 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{f}}_1 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{c}}^0 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{g}}^0 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{d}}^1 \dots \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \frac{3}{2} \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \\ \dots \bar{\bar{b}}\bar{\bar{f}}_3 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{e}}_2 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{g}}_2 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{d}}_1 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{a}}_1 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{e}}^0 - \bar{\bar{b}}\bar{\bar{h}}^0 - \bar{\bar{f}}^1 \dots \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \frac{3}{2} \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} \end{array} \right.$$

Af serierna C och D erhålla vi återigen två nya qvintserier, hvilka hafva $\sharp\bar{\bar{g}}^0$ (stora öfvertersens till $\bar{\bar{e}}^0$) och $\bar{\bar{f}}^1$ (stora undertersens till $\bar{\bar{a}}_1$) till utgångstoner.

Man finner således häraf, att af hvarje ny tersgeneration uppkommer beständigt en ny qvintserie, hvilket kan fortgå i oändlighet.

Allmänna uttrycket för svängningstalen till alla möjliga på detta sätt uppkomna toner kunna vi alltså beteckna med:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^y \left(\frac{5}{4}\right)^z,$$

eller, om vi beteckna qvintens svängningstal $\left(\frac{5}{2}\right)$ med Q och stora tersens $\left(\frac{5}{4}\right)$ med T ,

$$Q^y \cdot T^z,$$

hvarrest y och z äro 0 eller alla hela tal emellan gränserna $+\infty$ och $-\infty$.

Anm. Formeln $\left(\frac{3}{2}\right)^y \left(\frac{5}{4}\right)^z$ innefattar icke de särskilda tonernas öfver- och underoktaver, emedan vi endast tagit c^0 , hvars svängningstal är 1, till utgångston.

Utsträcka vi oss deremot till tonens c^0 alla möjliga öfver- och underoktaver, så förvandlas ofvanstående uttryck till:

$$2^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^z = 2^{x-(y+2z)} \cdot 3^y \cdot 5^z,$$

som, jämfördt med det förut (§. 2) funna $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, utvisar en olikhet, grundande sig endast på samtida oktaviöfflyttningar.

I följande tabell förekomma de olika qvintserierna uti de horizontala och tersserierna uti de vertikala raderna, hvilka båda olika slags serier vi kunna tänka oss utsträckta å ömse sidor i oändlighet. Med tonen c^0 till utgångston använda vi alltså den förut funna formeln:

$$Q^y \cdot T^z.$$

y	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8
$\overbrace{+3}^z$	$\overline{e_4}$	$\overline{h_4}$	$\overline{\sharp f_3}$	$\overline{\sharp c_2}$	$\overline{\sharp g_2}$	$\overline{\sharp d_1}$	$\overline{\sharp a_1}$	$\overline{\sharp e^0}$	$\overline{\sharp h^0}$	$\overline{\sharp \sharp f^1}$	$\overline{\sharp \sharp c^2}$	$\overline{\sharp \sharp g^2}$	$\overline{\sharp \sharp d^3}$	$\overline{\sharp \sharp a^3}$	$\overline{\sharp \sharp e^4}$	$\overline{\sharp \sharp h^4}$	$\overline{\sharp \sharp \sharp f^5}$
+2	$\overline{c_4}$	$\overline{g_4}$	$\overline{d_3}$	$\overline{a_3}$	$\overline{e_2}$	$\overline{h_2}$	$\overline{\sharp f_1}$	$\overline{\sharp c^0}$	$\overline{\sharp g^0}$	$\overline{\sharp d^1}$	$\overline{\sharp a^1}$	$\overline{\sharp e^2}$	$\overline{\sharp h^2}$	$\overline{\sharp \sharp f^3}$	$\overline{\sharp \sharp c^4}$	$\overline{\sharp \sharp g^4}$	$\overline{\sharp \sharp d^5}$
+1	$\overline{b a_5}$	$\overline{b e_4}$	$\overline{b h_4}$	$\overline{f^3}$	$\overline{c_2}$	$\overline{g_2}$	$\overline{d_1}$	$\overline{a_1}$	$\overline{e^0}$	$\overline{h^0}$	$\overline{\sharp f^1}$	$\overline{\sharp c^2}$	$\overline{\sharp g^2}$	$\overline{\sharp d^3}$	$\overline{\sharp a^3}$	$\overline{\sharp e^4}$	$\overline{\sharp h^4}$
0	$\overline{b f_5}$	$\overline{b c_4}$	$\overline{b g_4}$	$\overline{b d_3}$	$\overline{b a_3}$	$\overline{b e_2}$	$\overline{b h_2}$	$\overline{f_1}$	$\overline{c^0}$	$\overline{g^0}$	$\overline{d^1}$	$\overline{a^1}$	$\overline{e^2}$	$\overline{h^2}$	$\overline{\sharp f^3}$	$\overline{\sharp c^4}$	$\overline{\sharp g^4}$
-1	$\overline{bb d_5}$	$\overline{bb a_5}$	$\overline{bb e_4}$	$\overline{bb h_4}$	$\overline{b f_3}$	$\overline{b c_2}$	$\overline{b g_2}$	$\overline{b d_1}$	$\overline{b a_1}$	$\overline{b e^0}$	$\overline{b h^0}$	$\overline{f^1}$	$\overline{c^2}$	$\overline{g^2}$	$\overline{d^3}$	$\overline{a^3}$	$\overline{e^4}$
-2	$\overline{bbb h_6}$	$\overline{bb f_5}$	$\overline{bb c_4}$	$\overline{bb g_4}$	$\overline{bb d_3}$	$\overline{bb a_3}$	$\overline{bb e_2}$	$\overline{bb h_2}$	$\overline{bb f_1}$	$\overline{b c^0}$	$\overline{b g^0}$	$\overline{b d^1}$	$\overline{b a^1}$	$\overline{b e^2}$	$\overline{b h^2}$	$\overline{f^3}$	$\overline{c^4}$
-3	$\overline{bbb g_6}$	$\overline{bbb d_5}$	$\overline{bbb a_5}$	$\overline{bbb e_4}$	$\overline{bb f_3}$	$\overline{bb c_2}$	$\overline{bb g_2}$	$\overline{bb d_1}$	$\overline{bb a_1}$	$\overline{bb e^0}$	$\overline{bb h^0}$	$\overline{b f^1}$	$\overline{b c^2}$	$\overline{b g^2}$	$\overline{b d^3}$	$\overline{b a^3}$	

Vilja vi förflytta alla de toner, hvilka tillhöra vårt så kallade naturliga eller akustiska tonsystem, och hvilkas svängningstal representeras af formeln $Q^y \cdot T^z$, inom omfånget af en enda oktav, t. ex. $c^0 - c^1$, så finna vi, att oktaven kommer att omfatta ett oändligt antal toner. Det oaktadt utgöra dessa icke på långt när alla tänkbara toner, ty de hittills funna tonernas svängningstal äro endast beroende af primtalen 2, 3 och 5.

Införes t. ex. 7:de partialtonen, hvars svängningstal representeras af primtalet 7, så erhålles ett alldeles nytt tonsystem, hvars toners svängningstal således representeras af formeln:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^u,$$

som återigen fordrar en ny beteckning. Ty jemföres tonen $\sharp a^2$, som ligger en oktav, två rena qvinter och två stora terser tillsammantagne öfver c^0 , och hvars svängningstal således är

$$2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{225}{32},$$

med 7:de partialtonen till c^0 , så uppstår emellan dessa toner ett litet in-

tervall eller s. k. komma, hvars svängningstal är $\frac{225}{32} : 7 = \frac{225}{224}$, och som utvisar, huru mycket

den förra tonen ligger öfver den sednare. För att nu kunna beteckna 7:de partialtonen, så måste vi till $\sharp a^2$ foga ett slags nytt tecken, som uttrycker denna skillnad $\left(\frac{225}{224}\right)$ i tonhöjd.

Häri genom erhålla vi en ny i oändlighet fortgående tonserie, hvars toners svängningstal äro beroende af det nya primtalet 7. Detta tonsystem blir ännu mera kompliceradt än vårt s. k. naturliga tonsystem, emedan detsamma är en kombination af tre olika slags tonserier (oberäknadt oktavserien).

Häraf finna vi således, att ett nytt tonsystem uppkommer för hvarje nytt primtal, som införes såsom faktor uti svängningstalen; och emedan primtalens antal är oändligt, så måste äfven de rena tonsystemernas antal vara oändligt.

Det tonsystem, som innehåller alla möjliga toner, måste följaktligen vara beroende af alla möjliga primtal, hvadan allmänna formeln för svängningstalen är:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^u \cdot 11^v \cdot 13^w \dots\dots,$$

hvarrest $x, y, z, u, v, w \dots\dots$ beteckna 0 eller alla hela tal emellan gränserna $+\infty$ och $-\infty$.

§. 4.

I sammanhang med de olika tonsystemerna öfvergå vi nu till en närmare betraktelse af *klangen* och dess *harmoniska öfvertoner* eller *partialtoner*.

Härom yttrar HELMHOLTZ *) följande: "Wenn wir die Einwirkung verschiedener Wellenformen auf das Ohr genau und aufmerksam untersuchen, so ergibt sich eine sonderbare und unerwartete Thatsache, welche zwar lange genug einzelnen Musikern und Physikern bekannt gewesen ist, aber meistens nur als ein Curiosum betrachtet wurde, da man ihre Allgemeinheit und ihre grosse Bedeutung für alle Klangerscheinungen nicht kannte. Das Ohr, von solchen Schwingungen getroffen, hört nämlich bei gehörig angestrenzter Aufmerksamkeit nicht nur denjenigen Ton, dessen Tonhöhe durch die Dauer der Schwingungen in der Weise bestimmt ist, wie wir dies vorher auseinandergesetzt haben, sondern es hört ausser diesem noch eine ganze Reihe höherer Töne, welche wir die *harmonischen Obertöne* des Klanges nennen, im Gegensatz zu jenem ersten Tone, dem *Grundtone*, der unter ihnen allen der tiefste und in der Regel auch der stärkste ist, und nach dessen Tonhöhe wir die Tonhöhe des ganzen Klanges beurtheilen. Die Reihe dieser Obertöne ist für alle musikalischen Klänge, die einer regelmässig periodischen Luftbewegung entsprechen, genau dieselbe."

Dessa öfvertoners objektiva existens har HELMHOLTZ på experimentel väg lyckats bevisa genom att analysera klangen med tillhjälp af medljudande kroppar, såsom stämgaflar, spända strängar och membraner, hvilka råka i svängning, om någon af deras egna toner öfverensstämmer med en enkel ton (öfvertone) uti klangmassan. Vid en noggrannare klanganalys använder han dock sina *resonatorer*, emedan de äro mycket känsligare derigenom att deras inneslutna luftmassa i förening med hörselgången och trumhinnan bildar ett enda elastiskt system, hvars svängningar omedelbart inverka på hörselorganet. Blott och bart genom att behörigen ändra munnens ställning ungefär på samma sätt, som då man frambringa de olika vokalljuden, har jag tydligen kunnat förnimma ända till 12 partialtoner och derutöfver i en klang. Munnen gör då samma tjänst som resonatorn, i det att den inneslutna luftmassan försättes i svängning, när munkavitetens egen ton bringas i öfverensstämmelse med partialtonen, hvilket med någon öfning är lätt att åstadkomma. Denna enkla method har jag ofta med fördel använt vid mina un-

*) Die Lehre von den Tonempfindungen, pag. 36.

dersökningar angående klangfärgen, då jag icke allenast förnummit ett större eller mindre antal olika partialtoner utan äfven en ganska betydlig skillnad i intensitet dessa toner emellan.

Man skulle således redan häraf kunna sluta till, att klangfärgen endast är beroende af partialtonernas antal och intensitet. Att så verkligen är förhållandet, har HELMHOLTZ till fullo ådagalagt och dessutom med tillhjälp af noggrant intonerade stämgaflar funnit, att klangfärgen alldeles icke är beroende af partialtonernas interferens eller phasskillnad, hvilket är af stor vikt vid läran om hörselintrycken. Härvid bör dock anmärkas, att det här endast kan vara fråga om den *musikaliska* klangfärgen, d. v. s. den som beror af den regelmässigt-periodiskt svängande (musikaliska) delen uti klangen och ej af de olika missljud, hvilka i större eller mindre grad ofta förekomma i förening med densamma och hvilka vi kunna anse härröra antingen från oregelmässiga svängningar eller (enligt HELMHOLTZ) från tätt bredvid hvarandra liggande och med hvarandra skarpt dissonerande öfvertoner.

Beträffande örats märkvärdiga förmåga att kunna skilja emellan den olika klangfärgen och uppfatta klangen såsom varande en sammansättning af enkla pendelartade svängningar, så kommer HELMHOLTZ till det resultat, att det måste finnas särskilda delar i örat, hvilka under inverkan af olika höga toner försättas i svängning. Härpå grundar han sin hypotes angående de så kallade *Cortiska faserna* eller *bågarna*, hvilka befinna sig i örats snäcka och hvilka under inverkan af yttre svängningar likaledes kunna försättas i svängning, som vidare meddelas åt nerflödningens slutorganer. Man uppskattar antalet af dessa faser till ungefär 3000. Antaga vi, att hvarje sådan fas är afstämd efter sin ton, så äger ju örat ett slags stränginstrument, hvilket helt visst kan tillräckligt återgifva alla i naturen förekommande toner, ty enligt HELMHOLTZ's beräkning skulle hvarje oktavintervall innehålla ända till omkring 400 sådana faser.

HELMHOLTZ *) drager vidare följande slutsatser af sin hypotes: "Wird ein einfacher Ton dem Ohre zugeleitet, so müssen diejenigen *Corti'schen* Bögen, die mit ihm ganz oder nahehin im Einklang sind, stark erregt werden, alle anderen schwach oder gar nicht. Es wird also jeder einfache Ton von bestimmter Höhe nur durch gewisse Nervenfasern empfunden werden, und verschieden hohe Töne werden verschiedene Nervenfasern erregen. Wenn ein zusammengesetzter Klang oder ein Accord dem Ohre zugeleitet wird, so werden alle diejenigen elastischen Gebilde erregt werden, deren Tonhöhe den verschiedenen in der Klangmasse enthaltenen einzelnen Tönen entspricht, und bei gehörig gerichteter Aufmerksamkeit werden also auch alle die einzelnen Empfindungen der einzelnen einfachen Töne einzeln wahrgenommen werden können. *Der Accord wird in seine einzelnen Klänge, der Klang in seine einzelnen harmonischen Töne zerlegt werden müssen.*"

*) pag. 231.

§. 5.

Antaga vi nu, att en klang finnes, som innehåller alla möjliga partialtoner, hvilkas svängningstal alltså representeras af alla hela tal emellan 0 och $+\infty$, då grundtonens (första partialtonens) svängningstal är 1, så kunna vi benämna en sådan klang *fullständig* *) till skillnad från hvarje annan klang, som endast innehåller ett jämförelsevis ringa antal af dessa toner och som derföre måste betraktas såsom *ofullständig*.

Den *fullständiga* klangen med c^0 till grundton beteckna vi på följande sätt:

$$A. \begin{cases} c^0 & c^1 & g^1 & c^2 & e^2 & g^2 & - & c^3 & d^3 & e^3 & - & g^3 & - & - & h^3 & c^4 & - & d^4 & \dots; \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{cases}$$

alltså är allmänna uttrycket för *partialtonernas* ordningstal:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^u \cdot 11^v \cdot 13^w \dots,$$

hvarrest $x, y, z, u, v, w \dots$ beteckna 0 eller alla hela tal emellan 0 och $+\infty$.

Anm. I klangformeln A äro endast de partialtoner betecknade, hvilkas ordningstal innehålla talen 2, 3, 5 såsom faktorer, emedan vi ej exakt, utan endast approximativt, kunna uttrycka alla de öfriga (se §. 3).

Betrakta vi nu ofvanstående uttryck för den fullständiga klangen något närmare, så finna vi, att densamma innehåller icke allenast ett oändligt antal partialtoner utan äfven ett oändligt antal likaledes *fullständiga* klanger, hvilkas respektive grundtoner utgöras af grundklangens partialtoner. Ty är t. ex. andra partialtonen c^1 grundton uti en sådan klang, så utgöras dess partialtoner af hvarannan af grundklangens partialtoner (från c^1 räknadt), partialtonerna uti klangen på g^1 af hvar tredje, på c^2 af hvar fjerde, på e^2 af hvar femte o. s. v.

Hvarje partialton i en fullständig klang är således grundton till en ny och likaledes fullständig klang, hvilken sednare innehålles uti den förra.

Till skillnad från *grundklangen* benämna vi en sådan klang, såsom utgörande endast en del af den förra, *partialklang*.

Vidare är grundtonen c^0 , hvars svängningstal vi antaga vara 1, sjelf en *gemensam* partialton uti alla de klanger, hvilkas grundtoners svängningstal äro:

$$\begin{array}{llll} 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, 5^{-1}, 6^{-1} \text{ o. s. v.; ty han är} & & & \\ 2\text{:dra partialtonen uti klangen på grundtonen } 2^{-1} (= c_1), & & & \\ 3\text{:dje} & ,, & ,, & 3^{-1} (= f_2), \\ 4\text{:de} & ,, & ,, & 4^{-1} (= c_2), \\ 5\text{:te} & ,, & ,, & 5^{-1} (= {}^b\bar{a}_3) \\ \text{o. s. v.} & & & \end{array}$$

*) En sådan klang skulle kunna tänkas uppkomma, om en fullkomligt elastisk, böjlig och oändligt tunn sträng försättes i svängning.

och alla dess *underpartialtoner* tillsammans såsom en *omvänd* (reciprok) *fullständig klang*; den förra benämna vi en *tonisk klang* på c^0 och beteckna densamma med $c^0 (+)$, den sednare en *öfvertonisk klang* på c^0 , hvilken vi beteckna med $c^0 (-)$. Grundtonen c^0 uti den toniska klangen $c^0 (+)$ benämna vi *tonisk grundton*, den gemensamma partialtonen c^0 uti den öfvertoniska klangen $c^0 (-)$ *öfvertonisk grundton*.

Af tonserien B finna vi, att öfvertoniska klangen $c^0 (-)$ innehåller ett oändligt antal lika-ledes öfvertoniska klanger (underpartialklanger), hvilkas respektive öfvertoniska grundtoner utgöras af denna klangs (grundklangs) underpartialtoner. Ty underpartialtonerna uti öfvertoniska klangen på c_1 (andra underpartialtonen till c^0) utgöras af hvarannan af öfvertoniska grundklangsens $c^0 (-)$ underpartialtoner (från c_1 räknadt), underpartialtonerna uti öfvertoniska klangen på f_2 af hvar tredje, på c_2 af hvar fjerde, på $\bar{a}_3$ af hvar femte o. s. v.

Vidare finna vi af tonserien A, att grundtonen c^0 , hvars svängningstal är 1, sjelf är en gemensam underpartialton uti alla de öfvertoniska klanger, hvilkas öfvertoniska grundtoners svängningstal äro:

2, 3, 4, 5, 6 o. s. v.; ty han är

2:dra underpartialtonen uti öfvertoniska klangen på grundtonen 2 ($= c^1$),	
3:dje " " " " 3 ($= g^1$),	
4:de " " " " 4 ($= c^2$),	
5:te " " " " 5 ($= e^2$)	

o. s. v.

Således måste också öfvertoniska klangen på grundtonen c^0 vara en *gemensam underpartialklang* uti öfvertoniska klanger på grundtonerna c^1 , g^1 , c^2 , e^2 o. s. v.

Detsamma gäller om öfvertoniska klangen på hvilken annan grundton som helst.

Sedan vi nu lärt känna både den *toniska* och den *öfvertoniska* klangs egenskaper, så kunna vi slutligen uttala följande satser:

1) *Hvarje ton är såväl tonisk grundton till alla sina partialtoner som ock en gemensam partialton till alla sina underpartialtoner; och omvänt: hvarje ton är såväl öfvertonisk grundton till alla sina underpartialtoner som ock en gemensam underpartialton till alla sina partialtoner.*

2) *Hvarje tonisk klang med en gifven grundton är såväl en gemensam grundklang till toniska klanger på alla sina partialtoner, som ock en gemensam partialklang uti toniska klanger på samma grundtons alla underpartialtoner; och omvänt: hvarje öfvertonisk klang med en gifven grundton är såväl en gemensam grundklang till öfvertoniska klanger på alla sina underpartialtoner, som ock en gemensam underpartialklang uti öfvertoniska klanger på samma grundtons alla partialtoner.*

Taga vi t. ex. tonen c^0 till grundton, så är följaktligen:

$$c^0 (+) \left\{ \begin{array}{ll} \text{gemensam grundklang} & \text{till } c^1 (+), g^1 (+), c^2 (+), \bar{e}^2 (+) \text{ o. s. v.,} \\ \text{,, partialklang} & \text{till } c_1 (+), f_2 (+), c_2 (+), {}^b\bar{a}_3 (+) \text{ o. s. v.;} \end{array} \right.$$

$$c^0 (-) \left\{ \begin{array}{ll} \text{,, grundklang} & \text{till } c_1 (-), f_2 (-), c_2 (-), {}^b\bar{a}_3 (-) \text{ o. s. v.,} \\ \text{,, underpartialklang} & \text{till } c^1 (-), g^1 (-), c^2 (-), \bar{e}^2 (-) \text{ o. s. v.} \end{array} \right.$$

§. 6.

Antaga vi nu, att två eller flera klanger äro samtidigt ljudande, hvaraf uppkommer en sammansatt klang (*tvåklang* eller *mångklang*), så kunna vi på grund af det föregående lätt bestämma dessa klangers *toniska grundton* (grundtonen uti deras gemensamma grundklang) och *gemensamma partialton* (grundtonen uti deras gemensamma partialklang).

Låt a och b vara tvenne sins emellan hela primtal*), hvilka representera svängningstalen till grundtonerna uti tvenne klanger, samt $a < b$. Enligt toniska klangformeln A (§. 5) äro a och b partialtoner till grundtonen 1, som således är tvåklangens *närmast belägna* grundton eller *toniska grundton*; men emedan denna grundton sjelf är en gemensam partialton till alla sina underpartialtoner, så måste tvåklangens i sjelfva verket hafva ett oändligt antal toniska grundtoner, eller med andra ord, de enkla tonerna a och b äro partialtoner till ett oändligt antal grundtoner, hvilkas svängningstal äro:

$$1, 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, 5^{-1}, 6^{-1} \text{ o. s. v.}$$

Emedan vidare a och b äro sins emellan primtal, så måste deras produkt $a \cdot b$ vara svängningstalet till tvåklangens gemensamma (coinciderande) och *närmast belägna* partialton, som således är b :te partialtonen till tonen a och a :te partialtonen till tonen b ; men emedan partialtonen $a \cdot b$ sjelf är grundton till alla *sina* partialtoner, så måste tvåklangens hafva ett oändligt antal gemensamma partialtoner, hvilkas svängningstal äro:

$$1ab, 2ab, 3ab, 4ab, 5ab, 6ab \text{ o. s. v.}$$

Alltså erhålla vi följande sammanställning, då tvåklangens grundtoner a och b betraktas såsom beståndsdelar (*partialtoner*) uti en *tonisk klang*:

Toniska grundtoner.	Tvåklangens grundtoner.	Gemensamma partialtoner.	I.
$\dots 6^{-1} - 5^{-1} - 4^{-1} - 3^{-1} - 2^{-1} - 1$	$a - b$	$1ab - 2ab - 3ab - 4ab - 5ab - 6ab \dots$	

Häraf finna vi, att tvåklangens gemensamma partialtoner utgöra en *fullständig tonisk klang* och dess toniska grundtoner en *fullständig öfvertonisk klang*; vidare, att afståndet

*) Emedan vi i denna afhandling ej fästa afseende på tonernas *absoluta*, utan endast *relativa* svängningstal, så kunna vi alltid uttrycka dessa sednare uti de enklaste talförhållanden.

emellan intervallets $a:b$ lägsta ton a och hvar och en af grundtonerna är lika med afståndet emellan dess högsta ton b och den i ordningen motsvarande partialtonen, så att t. ex. 5:dje grundtonen 5^{-1} ligger lika mycket *under* tonen a , som 3:dje partialtonen $3ab$ ligger *öfver* tonen b .

Hittills hafva vi antagit, att intervallet $a:b$ är *toniskt*, d. v. s. att dess toner a och b äro beståndsdelar (*partialtoner*) uti en *tonisk klang*; men emedan $a:b = b^{-1}:a^{-1}$, så representerar äfven reciproktalet b^{-1} samma intervalls lägsta och a^{-1} dess högsta ton, alltså kunna, enligt öfvertoniska klangformeln B (§. 5), intervallets toner äfven betraktas såsom beståndsdelar (*underpartialtoner*) uti en *öfvertonisk klang*, hvars närmast belägna öfvertoniska grundton är 1, och emedan denna grundton själf är en gemensam underpartialton till alla sina partialtoner, så måste intervallets toner i själfva verket hafva ett oändligt antal öfvertoniska grundtoner, hvilkas svängningstal äro:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ o. s. v.}$$

Vidare är produkten $a^{-1} \cdot b^{-1} = (ab)^{-1}$ svängningstalet till tonernas b^{-1} och a^{-1} gemensamma och närmast belägna underpartialton, som således är a :te underpartialtonen till tonen b^{-1} och b :te underpartialtonen till tonen a^{-1} ; men emedan underpartialtonen $(ab)^{-1}$ själf är en öfvertonisk grundton till alla *sina* underpartialtoner, så måste tonerna b^{-1} och a^{-1} hafva ett oändligt antal gemensamma underpartialtoner, hvilkas svängningstal äro:

$$(1ab)^{-1}, (2ab)^{-1}, (3ab)^{-1}, (4ab)^{-1}, (5ab)^{-1}, (6ab)^{-1} \text{ o. s. v.}$$

Alltså erhålla vi följande sammanställning, då tvåklangens grundtoner, hvilkas intervall är $a:b = b^{-1}:a^{-1}$, betraktas såsom beståndsdelar (*underpartialtoner*) uti en *öfvertonisk klang*:

Gemensamma underpartialtoner.	Tvåklangens grundtoner.	Öfvertoniska grundtoner. II.
$\dots (6ab)^{-1} - (5ab)^{-1} - (4ab)^{-1} - (3ab)^{-1} - (2ab)^{-1} - (1ab)^{-1}$	$b^{-1} - a^{-1}$	$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 \dots$

Häraf finna vi, att tonernas b^{-1} och a^{-1} öfvertoniska grundtoner utgöra en *fullständig tonisk klang* och deras gemensamma underpartialtoner en *fullständig öfvertonisk klang*; vidare, att afståndet emellan intervallets lägsta ton b^{-1} och hvar och en af underpartialtonerna är lika med afståndet emellan dess högsta ton a^{-1} och den i ordningen motsvarande öfvertoniska grundtonen.

Multiplieras alla svängningstalen i formeln II med ab , så uppkommer formeln I, hvaraf följer, att tonernas a och b gemensamma partialtoner och öfvertoniska grundtoner sins emellan samt deras toniska grundtoner och gemensamma underpartialtoner sins emellan äro identiska, men af alldeles motsatt betydelse; ty intervallet $a:b$ kan anses antingen såsom *toniskt*, d. v. s. att dess toner äro beståndsdelar (*partialtoner*) uti en *tonisk klang*, eller såsom *öfvertoniskt*, d. v. s. att dess toner äro beståndsdelar (*underpartialtoner*) uti en *öfvertonisk klang*. Vidare

synes af formel. I och II, att *toniska grundtonen* (första gemensamma underpartialtonen) ligger lika mycket *under* intervalllets *lägsta* ton, som *öfvertoniska grundtonen* (första gemensamma partialtonen) ligger *öfver* dess *högsta* ton; dessa grundtoner äro således symmetriskt belägna å ömse sidor om intervallet, och följaktligen måste förvandtskapen *) emellan intervalllets toner vara densamma, vare sig att de anses tillhöra en tonisk eller en öfvertonisk klang.

Häraf följande sats: *En samklang af tvenne toner, hvilka som helst, är obestämd, eller med andra ord, ett intervalls harmoniska betydelse är tvetydig (tonisk eller öfvertonisk).*

Emedan svängningstalen uti vårt naturliga tonsystem endast innehålla talen 2, 3, 5 såsom faktorer, så kan det inträffa, att svängningstalet till den ena af intervalllets båda toner är en potens af talet 2, hvars exponent är ett helt positift tal, och att svängningstalet till den andra endast är beroende af talen 3 och 5, antingen hvar för sig eller ock båda på en gång.

Insätta vi derföre i formeln I svängningstalet 2^p i stället för a och antaga vi dessutom $2^p < b$, så blir svängningstalet till intervalllets ($2^p : b$) toniska grundton 1 och till dess öfvertoniska grundton $2^p \cdot b$; alltså är afståndet emellan *toniska grundtonen* och intervalllets *lägsta* ton samt emellan *öfvertoniska grundtonen* och dess *högsta* ton p oktaver, och i följe deraf äro de båda förra sins emellan och de båda sednare sins emellan *likbenämnda*. Insätta vi deremot i samma formel 2^p i stället för b och antaga vi $a < 2^p$, så blir svängningstalet till intervalllets ($a : 2^p$) toniska grundton 1 och till dess öfvertoniska grundton $2^p \cdot a$; men i detta fall är afståndet emellan *toniska grundtonen* och intervalllets *högsta* ton samt emellan *öfvertoniska grundtonen* och dess *lägsta* ton p oktaver, och således äro de båda förra sins emellan och de båda sednare sins emellan *likbenämnda*.

I båda dessa fall äro således toniska och öfvertoniska grundtonen endast under- och öfveroktaver till intervalllets egna toner.

Är deremot intetdera af intervalllets svängningstal en potens af talet 2, så är både den toniska och den öfvertoniska grundtonen *olika* med intervalllets toner, hvilka sednare tillsammans med hvar och en af de förra bilda en samklang af tre olika toner, eller en s. k. *treklang*.

Anm. Är ofvan anförda intervall ($2^p : b$), hvarest svängningstalet till dess *lägsta* ton är en potens af talet 2, mindre än *ett* oktavintervall ($1 : 2$), så blir deremot svängningstalet till det s. k. *omvända* intervalllets *högsta* ton en potens af samma tal. Ty flyttas det förra intervalllets *lägsta* ton en oktav *uppåt* eller dess *högsta* ton en oktav *nedåt*, så uppkommer i båda fallen intervallet $b : 2^{p+1}$. Intervallerna $2^p : b$ och $b : 2^{p+1}$ äro således hvarandras oktavyfyllnader eller *komplement*er.

§. 7.

Sedan vi nu i korthet framställt tvåklangens egenskaper, så öfvergå vi till *treklängen* och

*) Utgående från principen för den *normala klangfärgen* skola vi längre fram närmare redogöra för såväl enkla toners, som ock klangers inbördes förvandtskap.

antaga, att svängningstalen till alla tre grundtonerna uti densamma äro uttryckta uti de minsta möjliga hela tal.

Låt a , b , c representera dessa svängningstal, hvilka ej innehålla någon för alla tre gemensam faktor; låt vidare $a < b < c$ och t vara deras minsta gemensamma dividend, så måste

$$\frac{t}{c} < \frac{t}{b} < \frac{t}{a}.$$

Enligt formeln A (§. 5) äro a , b , c svängningstal till partialtoner uti en tonisk klang, uti hvilken grundtonens (första partialtonens) svängningstal är 1. Vidare är t svängningstalet till treklangens första gemensamma eller coinciderande partialton, som således är $\left(\frac{t}{a}\right)$:te partialtonen till a , $\left(\frac{t}{b}\right)$:te till b och $\left(\frac{t}{c}\right)$:te till c .

På samma sätt som i §. 6 finna vi, att treklängen har ett oändligt antal såväl *toniska grundtoner*, hvilka tillsammans bilda en *fullständig öfvertonisk* klang, som ock *gemensamma partialtoner*, hvilka bilda en *fullständig tonisk* klang.

Vi hafva således följande sammanställning, då treklangens grundtoner a , b , c betraktas såsom partialtoner uti en *tonisk* klang:

Toniska grundtoner.	Treklängens grundtoner.	Gemensamma partialtoner.	} III.
$\dots 6^{-1} - 5^{-1} - 4^{-1} - 3^{-1} - 2^{-1} - 1$	$a - b - c$	$t - 2t - 3t - 4t - 5t - 6t \dots$	

Men emedan $a : b : c = \frac{a}{t} : \frac{b}{t} : \frac{c}{t} = \left(\frac{t}{a}\right)^{-1} : \left(\frac{t}{b}\right)^{-1} : \left(\frac{t}{c}\right)^{-1}$, så äro enligt formeln B (§. 5)

reciproktalen $\left(\frac{t}{a}\right)^{-1}$, $\left(\frac{t}{b}\right)^{-1}$, $\left(\frac{t}{c}\right)^{-1}$ svängningstal till underpartialtoner uti en öfvertonisk klang, uti hvilken grundtonens (första underpartialtonens) svängningstal är 1. Vi kunna således anse treklangens grundtoner äfven såsom beståndsdelar uti en öfvertonisk klang, i hvilket fall svängningstalet till deras första gemensamma underpartialton är t^{-1} , som alltså är a :te underpartialtonen till $\left(\frac{t}{a}\right)^{-1}$, b :te till $\left(\frac{t}{b}\right)^{-1}$ och c :te till $\left(\frac{t}{c}\right)^{-1}$.

På samma sätt som i §. 6 finna vi, att treklängen, såsom *öfvertonisk* betraktad, har ett oändligt antal såväl *öfvertoniska grundtoner*, hvilka tillsammans bilda en *fullständig tonisk* klang, som ock *gemensamma underpartialtoner*, hvilka bilda en *fullständig öfvertonisk* klang.

Vi hafva således följande sammanställning, då grundtonerna uti treklängen betraktas såsom underpartialtoner uti en *öfvertonisk* klang:

Gemensamma underpartialtoner.	Treklangens grundtoner.	Öfvertoniska grundtoner.
$\dots (6t)^{-1} - (5t)^{-1} - (4t)^{-1} - (3t)^{-1} - (2t)^{-1} - t^{-1}$	$\left(\frac{t}{a}\right)^{-1} - \left(\frac{t}{b}\right)^{-1} - \left(\frac{t}{c}\right)^{-1}$	1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 ...

} **IV.**

Multiplieras alla svängningstalen i denna formel med t , så erhålles formeln III, hvaraf följer, att treklangens *toniska grundtoner* och *gemensamma underpartialtoner* sines emellan samt dess *gemensamma partialtoner* och *öfvertoniska grundtoner* sines emellan äro identiska, men af alldeles motsatt betydelse, allt eftersom treklangen betraktas såsom *tonisk* eller *öfvertonisk*.

Jemföras formlerna III och IV med hvarandra, så finna vi, att följande trenne fall kunna inträffa:

1) Äro treklangens beståndsdelar (grundtoner) närmare belägna intill toniska grundtonen (första gemensamma underpartialtonen) än till öfvertoniska grundtonen (första gemensamma partialtonen), d. v. s. om:

$$a < \frac{t}{c}, \quad b < \frac{t}{b}, \quad c < \frac{t}{a},$$

så säga vi, att treklangen är mera tonisk än öfvertonisk, och i följe deraf benämna vi densamma *tonisk*.

Ex.). Ut i den så kallade *durtreklangen* $c^0 - e^0 - g^0$, hvars toniska grundton således är

$$\frac{4}{4} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{6}{6}$$

c_2 och öfvertoniska grundton $\frac{h^3}{60}$, är:

$$\left. \begin{array}{lll} c^0 \text{ 4:de partialtonen till } c_2 & g^0 \text{ 10:de underpartialtonen till } \frac{h^3}{60} \\ e^0 \text{ 5:te} & \text{,,} & \text{,,} \\ g^0 \text{ 6:te} & \text{,,} & \text{,,} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{lll} e^0 \text{ 12:te} & \text{,,} & \text{,,} \\ c^0 \text{ 15:te} & \text{,,} & \text{,,} \end{array} \right\}$$

Alltså är treklangen $c^0 - e^0 - g^0$, såsom varande närmare belägen intill c_2 än till $\frac{h^3}{60}$, en *tonisk* treklang.

2) Äro treklangens beståndsdelar närmare belägna intill öfvertoniska grundtonen än till toniska grundtonen, d. v. s. om:

$$a > \frac{t}{c}, \quad b > \frac{t}{b}, \quad c > \frac{t}{a},$$

så säga vi, att treklangen är mera öfvertonisk än tonisk, och i följe deraf benämna vi densamma *öfvertonisk*.

Ex.). Ut i den så kallade *molltreklangen* $e^0 - g^0 - h^0$, hvars toniska grundton är c_3

$$\frac{10}{10} \quad \frac{12}{12} \quad \frac{15}{15}$$

4

och öfvertoniska grundton $\frac{h^2}{60}$, är:

$$\frac{60}{60}$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{h^0} \text{ 4:de underpartialtonen till } \underline{h^2} \\ \underline{g^0} \text{ 5:te} \quad \quad \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ \underline{e^0} \text{ 6:te} \quad \quad \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \underline{e^0} \text{ 10:de partialtonen till } c_3 \\ \underline{g^0} \text{ 12:te} \quad \quad \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ \underline{h^0} \text{ 15:de} \quad \quad \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \end{array} \right\}$$

Alltså är treklängen $\underline{e^0} - \underline{g^0} - \underline{h^0}$, såsom varande närmare belägen intill $\underline{h^2}$ än till c_3 , en *öfvertonisk* treklang.

3) Äro slutligen treklängens beståndsdelar lika långt aflägsna från toniska grundtonen som från öfvertoniska grundtonen, d. v. s. om:

$$a = \frac{t}{c}, \quad b = \frac{t}{b}, \quad c = \frac{t}{a},$$

så säga vi, att treklängen är lika mycket tonisk som öfvertonisk.

Emedan $a : b : c = \frac{a}{t} : \frac{b}{t} : \frac{c}{t} = \left(\frac{t}{a}\right)^{-1} : \left(\frac{t}{b}\right)^{-1} : \left(\frac{t}{c}\right)^{-1}$, så erhålles genom att substituera ofvan

stående värden på $\frac{t}{a}, \frac{t}{b}, \frac{t}{c}$:

$$a : b : c = c^{-1} : b^{-1} : a^{-1} \} \text{ V.}$$

Häraf följande sats: *Om en treklang är lika mycket tonisk som öfvertonisk, så äro reciprokvärdena till treklängens svängningstal, tagna i omvänd ordning, också svängningstal till samma treklang.*

En så beskaffad treklang är således *obestämd*, eller *harmoniskt tvetydig*.

Ex. 1). Uti den s. k. *öfverstigande treklängen* $c^0 - \underline{e^0} - \underline{\underline{\#g^0}}$, hvars toniska grundton

$$\begin{array}{ccc} 16 & 20 & 25 \end{array}$$

är c_4 och öfvertoniska grundton $\underline{\underline{\#g^4}}$, är:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 400 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} c^0 \text{ 16:de partialtonen till } c_4 \\ \underline{e^0} \text{ 20:de} \quad \quad \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ \underline{\underline{\#g^0}} \text{ 25:te} \quad \quad \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \underline{\underline{\#g^0}} \text{ 16:de underpartialtonen till } \underline{\underline{\#g^4}} \\ \underline{e^0} \text{ 20:de} \quad \quad \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ c^0 \text{ 25:te} \quad \quad \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \end{array} \right\}$$

Alltså är treklängen $c^0 - \underline{e^0} - \underline{\underline{\#g^0}}$ lika långt aflägsen från c_4 som från $\underline{\underline{\#g^4}}$; följaktligen är densamma lika mycket tonisk som öfvertonisk.

Ex. 2). Uti *förminskade treklängen* $\underline{a_1} - c^0 - \underline{\underline{e^0}}$, hvars toniska grundton är $\underline{\underline{b^0}}$ och

$$\begin{array}{ccc} 25 & 30 & 36 \end{array}$$

$$1$$

öfvertoniska grundton $\underline{\underline{h^4}}$, är:

$$\begin{array}{ccc} 900 & & \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{lll} \underline{a}_1 & 25\text{:te} & \text{partialtonen till } {}^b\bar{d}_5 \\ c^0 & 30\text{:de} & \text{,, ,, ,,} \\ {}^b\bar{e}^0 & 36\text{:te} & \text{,, ,, ,,} \end{array} \right\} \begin{array}{lll} {}^b\bar{e}^0 & 25\text{:te} & \text{underpartialtonen till } \underline{h}^4 \\ c^0 & 30\text{:de} & \text{,, ,, ,,} \\ \underline{a}_1 & 36\text{:te} & \text{,, ,, ,,} \end{array}$$

Alltså är treklängen $\underline{a}_1 - c^0 - {}^b\bar{e}^0$ lika långt aflägsen från ${}^b\bar{d}_5$ som från $\underline{h}^4$; följaktligen är densamma lika mycket tonisk som öfvertonisk.

Anm. Denna treklang får ej förväxlas med den i *harmoniläran* s. k. förminskade treklängen, som har följande utseende: $\underline{a}_1 - c^0 - {}^b\bar{e}^0$ och som består af en *akustisk* liten ters, $\underline{a}_1 - c^0$, och en *pythagorisk* liten ters, $c^0 - {}^b\bar{e}^0$, då deremot treklängen $\underline{a}_1 - c^0 - {}^b\bar{e}^0$ består af två små *akustiska* terser, $\underline{a}_1 - c^0$ och $c^0 - {}^b\bar{e}^0$.

§. 8.

Vi skola nu jemföra *tvenne treklanger* med hvarandra, af hvilka den enas svängningstal äro a, b, c och den andras α, β, γ .

Likasom förut (§. 7) antaga vi, att hvarken a, b, c sins emellan eller α, β, γ sins emellan hafva någon gemensam faktor, samt att $a < b < c$ och $\alpha < \beta < \gamma$. Låt vidare t vara minsta gemensamma dividenden till de förra svängningstalen och ϑ till de sednare; t och ϑ beteckna således svängningstalet till hvar sin treklangs öfvertoniska grundton (första gemensamma partialton).

Här vilja vi nu taga i betraktande följande trenne fall:

1) Äro *båda* treklangerne *toniska*, men den ena treklangs svängningstal a, b, c närmare belägna intill toniska grundtonen än den andras α, β, γ , eller med andra ord, är treklängen $a : b : c$ *mera tonisk* än treklängen $\alpha : \beta : \gamma$, så hafva vi:

$$\left. \begin{array}{l} a < \frac{t}{c}, \quad b < \frac{t}{b}, \quad c < \frac{t}{a}, \\ \alpha < \frac{\vartheta}{\gamma}, \quad \beta < \frac{\vartheta}{\beta}, \quad \gamma < \frac{\vartheta}{\alpha}, \\ a < \alpha, \quad b < \beta, \quad c < \gamma, \end{array} \right\}$$

hvaraf:

$$a < \frac{\vartheta}{\gamma}, \quad b < \frac{\vartheta}{\beta}, \quad c < \frac{\vartheta}{\alpha}.$$

Alltså är treklängen $a : b : c$ på samma gång *mera tonisk*, än treklängen $\alpha : \beta : \gamma$ är *öfvertonisk*.

2) Äro *båda* treklangerne *öfvertoniska*, men treklängen $a : b : c$ *mera öfvertonisk* än treklängen $\alpha : \beta : \gamma$, så hafva vi:

$$\left. \begin{aligned} a &> \frac{t}{c}, \quad b > \frac{t}{b}, \quad c > \frac{t}{a}, \\ \alpha &> \frac{\vartheta}{\gamma}, \quad \beta > \frac{\vartheta}{\beta}, \quad \gamma > \frac{\vartheta}{\alpha}, \\ \frac{t}{c} &< \frac{\vartheta}{\gamma}, \quad \frac{t}{b} < \frac{\vartheta}{\beta}, \quad \frac{t}{a} < \frac{\vartheta}{\alpha}, \end{aligned} \right\}$$

hvaraf:

$$\frac{t}{c} < \alpha, \quad \frac{t}{b} < \beta, \quad \frac{t}{a} < \gamma.$$

Alltså är treklängen $a:b:c$ på samma gång *mera öfvertonisk*, än treklängen $\alpha:\beta:\gamma$ är *tonisk*.

3) Är treklängen $a:b:c$ *tonisk* och treklängen $\alpha:\beta:\gamma$ *öfvertonisk*, men den *förra lika mycket tonisk*, som den *sednare är öfvertonisk*, så hafva vi:

$$\left. \begin{aligned} a &< \frac{t}{c}, \quad b < \frac{t}{b}, \quad c < \frac{t}{a}, \\ \alpha &> \frac{\vartheta}{\gamma}, \quad \beta > \frac{\vartheta}{\beta}, \quad \gamma > \frac{\vartheta}{\alpha}, \\ a &= \frac{\vartheta}{\gamma}, \quad b = \frac{\vartheta}{\beta}, \quad c = \frac{\vartheta}{\alpha}, \end{aligned} \right\}$$

hvaraf:

$$\left. \begin{aligned} a &< \alpha, \quad b < \beta, \quad c < \gamma, \\ \frac{\vartheta}{\gamma} &< \frac{t}{c}, \quad \frac{\vartheta}{\beta} < \frac{t}{b}, \quad \frac{\vartheta}{\alpha} < \frac{t}{a}. \end{aligned} \right\}$$

Alltså är treklängen $a:b:c$ på samma gång *mera tonisk* än treklängen $\alpha:\beta:\gamma$, men den *sednare* deremot *mera öfvertonisk* än den *förra*.

Är i allmänhet treklängen $a:b:c$ *lika mycket tonisk*, som treklängen $\alpha:\beta:\gamma$ är *öfvertonisk*, så hafva vi endast:

$$a = \frac{\vartheta}{\gamma}, \quad b = \frac{\vartheta}{\beta}, \quad c = \frac{\vartheta}{\alpha} \quad \text{VI.}$$

Men emedan $\alpha:\beta:\gamma = \frac{\alpha}{\vartheta}:\frac{\beta}{\vartheta}:\frac{\gamma}{\vartheta} = \left(\frac{\vartheta}{\alpha}\right)^{-1}:\left(\frac{\vartheta}{\beta}\right)^{-1}:\left(\frac{\vartheta}{\gamma}\right)^{-1}$, så blir, om de antagna värdena på $\frac{\vartheta}{\alpha}, \frac{\vartheta}{\beta}, \frac{\vartheta}{\gamma}$ substitueras:

$$\alpha:\beta:\gamma = c^{-1}:b^{-1}:a^{-1} \quad \text{VII.}$$

Reciproktalen c^{-1}, b^{-1}, a^{-1} kunna således också representera svängningstalen till treklängen $\alpha:\beta:\gamma$, i hvilket fall svängningstalet till densammas toniska grundton (första gemen-

samma underpartialton) är t^{-1} och till dess öfvertoniska grundton (första gemensamma partialton) 1; men förut hafva vi antagit, att $\mathcal{G}$ är svängningstalet till treklangens $\alpha : \beta : \gamma$ öfvertoniska grundton, alltså måste $t^{-1} : 1 = 1 : \mathcal{G}$, hvaraf:

$$\mathcal{G} = t \} \text{VIII.}$$

Insätta vi nu detta värde på $\mathcal{G}$ uti eqv. VI, så blir:

$$a = \frac{t}{\gamma}, \quad b = \frac{t}{\beta}, \quad c = \frac{t}{\alpha}, \quad \text{hvaraf:}$$

$$a : b : c = \gamma^{-1} : \beta^{-1} : \alpha^{-1} \} \text{IX.}$$

$$\frac{t}{c} = \alpha, \quad \frac{t}{b} = \beta, \quad \frac{t}{a} = \gamma \} \text{X.}$$

Alltså är treklängen $a : b : c$ på samma gång *lika mycket öfvertonisk*, som treklängen $\alpha : \beta : \gamma$ är *tonisk*.

Häraf följande sats: *Om en treklang är lika mycket tonisk, som en annan treklang är öfvertonisk, så inträffar: 1) att den förra är på samma gång lika mycket öfvertonisk, som den sednare är tonisk, 2) att svängningstalen till den ena treklängen kunna uttryckas uti reciprokvärdena till den andras svängningstal, tagna i omvänd ordning, och slutligen 3) att svängningstalen till båda treklängernas öfvertoniska grundtoner äro alldeles lika.*

Såsom exempel på sådana treklanger hafva vi de i §. 7 omnämnda s. k. dur- och molltreklängerna $c^0 - \underline{e}^0 - g^0$ och $\underline{e}^0 - g^0 - \underline{h}^0$, af hvilka den förra är tonisk (med c_2 till tonisk

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & 5 & 6 & 10 & 12 & 15 & 1 \end{array}$$

och $\underline{h}^3$ till öfvertonisk grundton) och den sednare är öfvertonisk (med c_3 till tonisk och

$$\begin{array}{ccccccc} 60 & & & & & & 1 \end{array}$$

$\underline{h}^2$ till öfvertonisk grundton).

60

Jemföra vi nu dessa treklanger med hvarandra, så finna vi, att:

$$\begin{array}{l} c^0 \text{ är 4:de partialtonen till } c_2 \left\{ \begin{array}{l} \underline{h}^0 \text{ är 4:de underpartialtonen till } \underline{h}^2 \\ \underline{e}^0 \text{ „ 5:te „ „ „ } g^0 \text{ „ 5:te „ „ „ } \\ g^0 \text{ „ 6:te „ „ „ } \underline{e}^0 \text{ „ 6:te „ „ „ } \end{array} \right. \\ g^0 \text{ är 10:de underpartialtonen till } \underline{h}^3 \left\{ \begin{array}{l} \underline{e}^0 \text{ är 10:de partialtonen till } c_3 \\ \underline{e}^0 \text{ „ 12:te „ „ „ } g^0 \text{ „ 12:te „ „ „ } \\ c^0 \text{ „ 15:de „ „ „ } \underline{h}^0 \text{ „ 15:de „ „ „ } \end{array} \right. \end{array}$$

Alltså är durtreklängen $c^0 - \underline{e}^0 - g^0$ lika mycket tonisk, som molltreklängen $\underline{e}^0 - g^0 - \underline{h}^0$ är öfvertonisk, och omvändt, den förra är lika mycket öfvertonisk, som den sednare är tonisk.

Vidare äro deras svängningstal af den beskaffenhet, att:

$$\left. \begin{aligned} 10 : 12 : 15 &= 6^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1}, \\ 4 : 5 : 6 &= 15^{-1} : 12^{-1} : 10^{-1}, \end{aligned} \right\}$$

d. v. s. att den ena treklangens svängningstal förhålla sig till hvarandra, som reciprokvärdena till den andras svängningstal, tagna i omvänd ordning.

Slutligen finna vi, att svängningstalet 60 är gemensamt för båda treklangernas öfvertoniska grundtoner $\underline{h}^3$ och $\underline{h}^2$, eller med andra ord, att afstånden emellan treklangernas toniska och öfvertoniska grundtoner äro alldeles lika. Ty intervallet $c_2 - \underline{h}^3$, som omfattar durtreklangen $c^0 - \underline{e}^0 - g^0$, är lika med intervallet $c_3 - \underline{h}^2$, som omfattar molltreklangen $\underline{e}^0 - g^0 - \underline{h}^0$, och hvars beståndsdelar c_3 och $\underline{h}^2$ ligga en oktav under hvar sin af det förra intervallets beståndsdelar c_2 och $\underline{h}^3$. Om vi derföre uppflytta treklangen $\underline{e}^0 - g^0 - \underline{h}^0$ med *en* oktav, hvaraf erhålles $\underline{e}^1 - g^1 - \underline{h}^1$, så blifva på samma gång dess toniska och öfvertoniska grundtoner *lika mycket* uppflyttade; följaktligen äro toniska och öfvertoniska grundtonerna c_2 och $\underline{h}^3$ gemensamma för både durtreklangen $c^0 - \underline{e}^0 - g^0$ och molltreklangen $\underline{e}^1 - g^1 - \underline{h}^1$.

Kasta vi nu en blick på *toniska* klangformeln A (§. 5), uti hvilken vi tagit c^0 till grundton, så finna vi, att durtreklangen $c^2 - \underline{e}^2 - g^2$ bildas af 4:de, 5:te och 6:te partialtonerna och att molltreklangen $\underline{e}^3 - g^3 - \underline{h}^3$ bildas af 10:de, 12:te och 15:de partialtonerna; alltså är c^0 dessa treklangers gemensamma toniska grundton. Detta öfverensstämmer fullkomligt med hvad vi förut funnit, nemligen att c_2 är en gemensam tonisk grundton till treklangerne $c^0 - \underline{e}^0 - g^0$ och $\underline{e}^1 - g^1 - \underline{h}^1$; ty *uppflytta* vi alla dessa toner med *två* oktaver, så erhålla vi alldeles samma toner som de ofvannämnda *partialtonerna* uti formeln A.

Vidare, emedan $\underline{h}^3$ är en gemensam öfvertonisk grundton till treklangerne $\underline{e}^1 - g^1 - \underline{h}^1$ och $c^0 - \underline{e}^0 - g^0$, blifver, om vi nedflytta dessa toner med *tre* oktaver, $\underline{h}^0$ en gemensam öfvertonisk grundton till molltreklangen $\underline{e}_2 - g_2 - \underline{h}_2$, som bildas af 4:de, 5:te och 6:te underpartialtonerna, och till durtreklangen $c_3 - \underline{e}_3 - g_3$, som bildas af 10:de, 12:te och 15:de underpartialtonerna. Betrakta vi nu *öfvertoniska* klangformeln B (§. 5), uti hvilken vi tagit ofvannämnda c^0 till grundton, så finna vi, att molltreklangen $f_3 - \overset{b}{a}_3 - c_2$ bildas af 4:de, 5:te och 6:te underpartialtonerna och att durtreklangen $\overset{b}{a}_4 - f_4 - \overset{b}{a}_4$ bildas af 10:de, 12:te och 15:de underpartialtonerna. Äfven här märka vi en fullkomlig öfverensstämmelse; ty *nedflytta* vi såväl alla tonerna uti treklangerne $\underline{e}_2 - g_2 - \underline{h}_2$ och $c_3 - \underline{e}_3 - g_3$, som ock deras gemensamma öfvertoniska grundton $\underline{h}^0$, med en ren qvint och en stor ters tillsammantagna, så erhålla vi med tillhjälp af den på qvint- och tersgenerationer grundade tabellen i §. 3 alldeles samma toner som de ofvannämnda *underpartialtonerna* uti formeln B.

Då nu durtreklngen $c^2 - e^2 - g^2$ utgöres af 4:de, 5:te och 6:te partialtonerna till toniska grundtonen c^0 , och molltreklngen $f_3 - \bar{a}_3 - c_2$ af 4:de, 5:te och 6:te underpartialtonerna till öfvertoniska grundtonen c^0 , så äro dessa treklanger symmetriskt belägna å ömse sidor om den gemensamma tonen c^0 .

En liknande symmetri visar sig äfven emellan molltreklngen $e^3 - g^3 - h^3$, som utgöres af 10:de, 12:te och 15:te partialtonerna, och durtreklngen $\bar{d}_4 - f_4 - \bar{a}_4$, som utgöres af 10:de, 12:te och 15:de underpartialtonerna. Men undersöka vi toniska klangformeln A något närmare, så finna vi, att densamma innehåller ett *oändligt* antal durtreklanger, af hvilka hvar och en bildas af trenne partialtoner, hvilkas svängningstal i allmänhet äro $4n$, $5n$ och $6n$, hvarest n betecknar hvilket helt positift tal som helst; är t. ex. $n = 3$, så erhålla vi durtreklngen $g^3 - h^3 - d^4$, som således bildas af 12:te, 15:de och 18:de partialtonerna. Samma formel innehåller äfven ett oändligt antal molltreklanger, bildade af trenne partialtoner, hvilkas svängningstal äro $10n$, $12n$ och $15n$. Äfven den öfvertoniska klangformeln B innehåller ett oändligt antal såväl moll- som durtreklanger, bildade af trenne underpartialtoner, hvilkas svängningstal äro: för molltreklangerne $(6n)^{-1}$, $(5n)^{-1}$ och $(4n)^{-1}$ och för durtreklangerne $(15n)^{-1}$, $(12n)^{-1}$ och $(10n)^{-1}$.

Häraf finna vi således, att *hvarje durtreklng*, $n(4:5:6)$, *uti formeln A motsvaras af en symmetriskt belägen molltreklng*, $(n(6:5:4))^{-1}$, *uti formeln B*, och att *hvarje molltreklng*, $n(10:12:15)$, *uti den förra formeln motsvaras af en symmetriskt belägen durtreklng*, $(n(15:12:10))^{-1}$, *uti den sednare*.

Likasom spegelbilden af en lysande kropp aflägsnar sig och aftager i intensitet (ljusstyrka) alltefter som föremålet drages tillbaka, så kunna vi på samma sätt föreställa oss treklangernas korresponderande rörelse uti den toniska och öfvertoniska klangen. Alltså ju mera en durtreklng eller en molltreklng uti den toniska klangen är aflägsen från grundtonen, desto svagare är dessa treklangers intensitet (ljudstyrka), hvilken egenskap vi äfven tilldela deras bilder, d. v. s. de symmetriskt belägna treklangerne uti den öfvertoniska klangen.

Härpå grunda vi just principen för *klangförvandtskapen*, som i samband med den af oss benämnda *normala klangfärgen* i det följande kommer att närmare förklaras.

Emellertid framgår tydligen och klart af såväl den toniska som den öfvertoniska klangens egenskaper, att endast tvenne olika slags grundtreklanger finnas, nemligen durtreklngen, af hvilka den förra är lika mycket tonisk, som den sednare är öfvertonisk, och dessutom båda två af den beskaffenhet, att de stå till sina respektive toniska och öfvertoniska grundtoner uti den allra närmaste förvandtskap och derigenom karakterisera *de* toniska och öfvertoniska klanger, af hvilkas vigtigaste beståndsdelar de äro bildade.

Af denna anledning gifva vi dem derföre benämningen *grundtreklanger*.

Men emedan de hvar för sig äro sammansatta af trenne så kallade *konsonerande* intervaller, nemligen rena qvinten, stora och lilla (akustiska) tersen, så benämner man dem äfven *konsonerande treklanger*; följaktligen är *durtreklängen* en *tonisk-konsonerande treklang* och *molltreklängen* en *öfvertonisk-konsonerande treklang*.

Uti den toniska klangen är visserligen den först framträdande molltreklängen en beståndsdel, af hvilken anledning man ju också skulle kunna anse denna treklang såsom tonisk, ehuru väl i betydligt mindre grad än durtreklängen; men såsom tonisk betraktad kan ej molltreklängen vara konsonerande, emedan dess toniska grundton icke är likbenämd med någon af treklangens egna toner och dessutom bildar med *högsta* tonen uti densamma ett dissonerande intervall, som, reduceradt inom oktavens omfång, benämnes *stora septiman*. På samma sätt kan ej heller durtreklängen, såsom öfvertonisk betraktad, vara konsonerande, ty i detta fall är icke dess öfvertoniska grundton likbenämd med någon af treklangens toner, af hvilka dessutom den *lägsta* bildar med öfvertoniska grundtonen samma dissonerande intervall som i förra fallet.

Alltså är *molltreklängen*, såsom tonisk betraktad, en *tonisk-dissonerande treklang* och *durtreklängen*, såsom öfvertonisk betraktad, en *öfvertonisk-dissonerande treklang*.

Af klangformeln A (§. 5) se vi tydligen, att den först framträdande molltreklängens, $\underline{e^3} - \underline{g^3} - \underline{h^3}$, toner tillsammans med toniska grundtonen c^0 bilda en samklang af fyra sins emellan olika toner (*fyrklang*), som, reducerad inom oktavens omfång, vanligen benämnes *Septimackord*. Den första septimackord, som framträder uti toniska klangen med c^0 till grundton, är således $c^3 - \underline{e^3} - \underline{g^3} - \underline{h^3}$, som utgöres af 8:de, 10:de, 12:te och 15:de partialtonerna; men emedan öfvertoniska grundtonen till denna fyrklang är $\underline{h^6}$, hvars svängningstal är 120, så äro $\underline{h^3}$, $\underline{g^3}$, $\underline{e^3}$ och c^3 också 8:de, 10:de, 12:te och 15:de underpartialtonerna uti öfvertoniska klangen på $\underline{h^6}$, och i följe deraf är denna fyrklang lika mycket tonisk som öfvertonisk, d. v. s. att den är obestämd eller harmoniskt tvetydig. Den är äfven *dissonerande*, emedan uti densamma, såsom tonisk betraktad, innehålles ett dissonerande element, som är stora septiman $\underline{h^3}$, och, såsom öfvertonisk betraktad, den likaledes dissonerande underseptiman c^3 . Man skulle också kunna anse, att orsaken till denna fyrklangs dissonerande egenskap ligger uti lilla tersen $\underline{e^3} - \underline{g^3}$, som i likhet med alla andra intervaller är lika mycket tonisk som öfvertonisk (se §. 6). Ty, såsom tillhörande durtreklängen $e^3 - \underline{e^3} - \underline{g^3}$, måste han vara *tonisk* och, såsom tillhörande molltreklängen $\underline{e^3} - \underline{g^3} - \underline{h^3}$, måste han vara *öfvertonisk*; men emedan båda dessa treklanger ingå uti fyrklangen $c^3 - \underline{e^3} - \underline{g^3} - \underline{h^3}$, så är han ju på samma gång både tonisk och öfvertonisk, hvilket innebär en uppenbar motsägelse, som just karakteriserar dissonansen.

Innan vi nu gå vidare, vilja vi i korthet omnämna, huru de konsonerande treklangerna (dur- och molltreklängen) af nyare tiders författare blifvit förklarade.

HELMHOLTZ *) yttrar sig angående durtreklängen på följande sätt: "In einem Duraccorde $c - \underline{e} - g$ können wir g und $\underline{e}$ als Bestandtheile des c -Klanges ansehen, aber weder c noch g als Bestandtheile des $\underline{e}$ -Klanges, und weder c noch $\underline{e}$ als solche des g -Klanges. Der Duraccord $c - \underline{e} - g$ ist also ganz eindeutig, er kann nur mit dem Klange des c verglichen werden, und deshalb ist c der herrschende Ton in dem Accorde, sein *Grundton*, oder nach Rameau's Bezeichnung sein *Fundamentalbass*, und keiner der beiden anderen Töne des Accordes hat das geringste Recht, diese Stelle einzunehmen."

Vidare (angående Molltreklängen): "Im Mollaccorde $c - \flat\bar{e} - g$ ist g ein Bestandtheil des c -Klanges und des $\flat\bar{e}$ -Klanges. Weder $\flat\bar{e}$ noch c kommt in einem der beiden anderen Klänge vor. Es ist also g jedenfalls ein abhängiger Ton. Dagegen kann man den genannten Mollaccord einmal als einen c -Klang betrachten, dem der fremde Ton $\flat\bar{e}$ hinzugefügt ist, oder als einen $\flat\bar{e}$ -Klang, dem der Ton c hinzugefügt ist. Beide Fälle kommen vor. Es ist aber die erstere Deutung die gewöhnliche und vorwiegende. Denn wenn wir den Accord als c -Klang betrachten, so finden wir in ihm das g als dritten Partialton, und nur statt des schwächeren fünften Partialtones $\underline{e}$ den fremden Ton $\flat\bar{e}$. Fassen wir den Accord aber als $\flat\bar{e}$ -Klang, so ist zwar der schwache fünfte Partialton durch das g richtig vertreten, statt des stärkeren dritten, welcher $\flat\bar{h}$ sein sollte, finden wir aber den fremden Ton c . In der Regel finden wir deshalb den Mollaccord $c - \flat\bar{e} - g$ in der modernen Musik so gebraucht, dass c als sein Grundton oder Fundamentalbass behandelt ist, und der Accord einen etwas veränderten oder getrübbten c -Klang vertritt, aber es kommt der Accord in der Lage $\flat\bar{e} - g - c$ (besser $\flat\bar{e} - g - \bar{c}$) auch in der $\flat\bar{h}$ -Durtonart vor, als Vertreter des Accordes der Subdominante $\flat\bar{e}$. Rameau nennt ihn dann den Accord der grossen Sexte, und betrachtet richtiger, als die neueren Theoretiker meist thun, $\flat\bar{e}$ als seinen Fundamentalbass."

Anm. Derigenom att c höjes med ett syntoniskt komma till $\bar{c}$, blir $\flat\bar{e}$ verkligen en Fundamentalbass till ackordet $\flat\bar{e} - g - \bar{c}$, men ej till ackordet $\flat\bar{e} - g - c$, emedan $\bar{c}$ är 27:de partialtonen uti $\flat\bar{e}$ -klängen; men derigenom har ju också den ursprungliga molltreklängen $c - \flat\bar{e} - g$ blifvit förändrad till $\bar{c} - \flat\bar{e} - g$, i hvilken sednare förekommer en *pythagorisk* liten ters $\bar{c} - \flat\bar{e}$ i stället för *akustiska* lilla tersen $c - \flat\bar{e}$. Vi komma längre fram att närmare redogöra för detta *syntoniskt förändrade* mollackord.

*) Die Lehre von den Tonempfindungen, pag. 461.

HAUPTMANN *) uppfattar molltreklngen på ett helt annat sätt: "Die Bestimmungen der Dreiklängsintervalle sind bisher von einer positiven Einheit ausgehend gesetzt worden, von einem Grundtone, auf welchen sich die Quint und die Terz bezieht." Detta har egentligen afseende på durtreklngen. Vidare: "Sie lassen sich auch in einem *entgegengesetzten* Sinne denken. Wenn jenes sich so ausdrücken lässt: dass ein Ton Quint und Terz *habe*, so würde die entgegengesetzte Bedeutung darin bestehen: dass ein Ton Quint und Terz *sei*." Härmed förstås, att t. ex. durtreklngens $c - \underline{e} - g$ grundton c har g till qvint och $\underline{e}$ till ters, och att t. ex. molltreklngens $c - \bar{e} - g$ qvint g är en qvint till c och en ters till $\bar{e}$. "Das *Haben* ist ein activer, das *Sein* ein passiver Zustand. Die Einheit, auf welche die beiden Bestimmungen in der zweiten Bedeutung sich beziehen, ist eine leidende: im Gegensatz des *Habens* der ersten, ist die zweite ein *Gehabt-werden*. Jenes spricht sich im *Durdreiklänge*, dieses im *Molldreiklänge* aus."

Han betraktar vidare molltreklngen såsom en *omvänd* durtreklang, hvilket enligt vår åsigt är ganska naturligt, och uttrycker svängningstalens förhållande, uti durtreklngen med $(4:5:6)^{+1}$ och uti molltreklngen med $(6:5:4)^{-1}$.

OETTINGEN uppfattar, i öfverensstämmelse med HELMHOLTZ, durtreklngens toner såsom beståndsdelar uti en tonisk klang; men hvad molltreklngen beträffar, så lägger han största vikt på den gemensamma öfvertonen till treklngens beståndsdelar.

Med afseende på HAUPTMANN'S uppfattning yttrar han **): "Die Obertöne des Molldreiklängs, die für uns Hauptsache sind, werden von HAUPTMANN nicht berücksichtigt, ebenso wenig wie der Durdreiklang als Bestandtheil eines *Grundklängs* angesehen wird. Auch bei diesem, dem Durdreiklänge, sucht HAUPTMANN nur eine Beziehung zwischen den angegebenen Tönen selbst, — und findet sie im Terz und Quint *Haben*, beim Molldreiklänge im Terz und Quint *Sein*. — Durch die oben von mir dargestellte Anschauung wird das Verhältniss in gewissen Sinne umgekehrt. Die Töne des *Durdreiklängs* **sind** gemeinsame *Bestandtheile* eines *tonischen Grundklängs*, die des *Molldreiklängs* **haben** einen gemeinsamen *phonischen Oberton*. Jener, der tonische Grundton stimmt überein mit dem Grundtone c des Dreiklängs, hier stimmt der phonische Oberton mit der Quinte $\underline{e}$ des Molldreiklängs $\underline{a} - c - \underline{e}$ überein. Ein neues Moment kommt aber hinzu: Der Durdreiklang $c - \underline{e} - g$ *hat* auch einen phonischen Oberton $\underline{h}$, dieser aber stimmt nicht mit den Bestandtheilen des Accordes überein. (Wir erkennen in ihm den Leitton der c -Durtonart). Ebenso wiederum *ist* der Molldreiklang $\underline{a} - c - \underline{e}$ Bestandtheil eines tonischen Grundtones f , (der in einem ähnlichen Leittonverhältniss zu $\underline{e}$ steht, wie $\underline{h}$ zu c)."

*) Die Natur der Harmonik und der Metrik, pag. 29.

**) Harmoniesystem in dualer Entwicklung, pag. 39.

Med afseende på HELMHOLTZ's uppfattning af molltreklängen $c - \bar{b}e - g$ yttrar han *): "Wenn HELMHOLTZ streng bei dem Prinzip der Tonicität, wie ich es genannt habe, geblieben wäre, so hätte er $\bar{b}a$ als Fundamentalbass des Molldreiklanges bezeichnen müssen. Er geht indess hier von der Voraussetzung aus, der Grundbass müsse ein mit den angegebenen Klängen übereinstimmender Ton sein, daher keine andern Töne als c , $\bar{b}e$, g selbst in Betracht kommen. Tonisch gedacht, ist alsdann allerdings g jedenfalls ein *abhängiger* Ton, während $\bar{b}e$ und c Grundtöne sein können, aber der Art, dass je der andere Ton als *störendes* Element des Zusammenklanges auftritt. Eine dieser Art *negative* Begründung der Mollharmonie kann unmöglich befriedigend das Verständniss dieses Accordes ausdrücken. Dem Intervall $c - g$ könnte auf diese Weise jeder beliebige andere Ton (etwa $\sharp d$) als störendes Element beigelegt werden."

Häraf finna vi således, att HELMHOLTZ uppfattar både molltreklängen och durtreklängen efter alldeles samma princip (tonicitets-principen), i det han anser, att fundamentalbasen till molltreklängen måste öfverensstämma antingen med grundtonen c eller med lilla tersen $\bar{b}e$. Men emedan molltreklängen derigenom skulle komma att representera en i viss mån *dissonerande* tonisk klang, så blefve följden den, att denna treklang till en del förlorade egenskapen att vara *konsonerande*, hvilken slutsats man ej kan draga af HELMHOLTZ's definition på *konsonerande treklang*. Han säger nemligen **): "Damit ein Accord consonant sein könne, ist zunächst klar, dass *jeder Ton* desselben mit *jedem* andern consonant sein müsse; denn wenn nur zwei von den Tönen des Accordes mit einander dissoniren und Schwebungen geben, so ist der Wohlklang des Accordes gestört. Die consonanten Accorde von je drei Tönen finden wir, wie leicht zu ersehen ist, indem wir zu einem Grundtone, den wir c nennen wollen, zwei andere Töne hinzusetzen, deren jeder mit c ein consonirendes Intervall bildet, und dann zusehen, ob auch das dritte neu entstehende Intervall, welches die beiden hinzugesetzten Töne mit einander bilden, consonirt. Ist dies der Fall, so consonirt jeder der drei Töne mit jedem andern, und der Accord ist consonant."

Tillämpa vi detta på durtreklängen $c - \underline{e} - g$ och molltreklängen $c - \bar{b}e - g$, så måste vi, strängt taget, anse den ena af dessa treklanger vara ej mindre konsonerande än den andra, emedan begge innehålla samma konsonerande intervaller, nemligen: rena qvinten $c - g$, stora tersen $c - \underline{e}$ (i durtreklängen) och $\bar{b}e - g$ (i molltreklängen) samt lilla tersen $\underline{e} - g$ (i durtreklängen) och $c - \bar{b}e$ (i molltreklängen).

Men vilja vi närmare undersöka en sammansatt klang, så visa sig tvenne intressanta akustiska fenomen, hvilka efter omständigheterna kunna inverka mer eller mindre störande

*) pag. 43.

**) pag. 332.

på samklangen. Dessa äro de så kallade *kombinationstonerna* och *sväfningsarne* *) (Schwebungen), hvilka uppkomma af helt olika orsaker, oaktadt de förras svängningstal i alla händelser är lika med sväfningsarnes antal. Då nu dylika sväfningar kunna uppkomma såväl af kombinationstoner som ock af samklangens öfvertoner, så kan man lätt föreställa sig, hvilken störande inverkan kombinationstoner och sväfningar i förening *kunna* åstadkomma. Likväl erfordras vissa villkor, på det att dessa störningar tydligt skola framträda.

Beträffande kombinationstonerna anmärker HELMHOLTZ **) följande: "Einzelne Instrumente liefern besonders starke Combinationstöne. Die Bedingung für ihre Erzeugung ist, dass dieselbe Luftmasse von beiden Tönen in heftige Erschütterung versetzt wird. Dies geschieht am stärksten in der mehrstimmigen Sirene, in welcher dieselbe rotirende Scheibe zwei oder mehrere Löcherreihen enthält, die aus demselben Windkasten gleichzeitig angeblasen werden. — Werden zwei Löcherreihen angeblasen, so entstehen solche Schwingungen in der Luftmasse des Windkastens beiden Tönen entsprechend, und durch jede Reihe von Oeffnungen wird nicht ein gleichmässiger zufließender Luftstrom entleert, sondern ein Luftstrom, der durch den anderen Ton schon in Schwingungen versetzt ist. Die Combinationstöne sind unter *diesen Umständen* ausserordentlich stark, fast ebenso stark wie die primären Töne. — Aehnlich der Sirene sind die Verhältnisse im Harmonium. Auch hier ist ein gemeinsamer Windraum vorhanden, und wenn zwei Tasten angeschlagen werden, haben wir zwei Oeffnungen, welche durch die Zungen rhythmisch geöffnet und geschlossen werden. Auch hier wird die Luft in dem gemeinsamen Behälter durch beide Töne stark erschüttert, und durch jede Oeffnung Luft geblasen, die von der anderen Zunge her schon in schwingende Bewegung gesetzt ist." Dessutom anmärker han, att kombinationstonerna, som frambringas af detta instrument, äro icke på längt när så starka som uti Sirenen, "wohl weil der Windkasten im Verhältniss zu den Oeffnungen ausserordentlich viel grösser ist, und deshalb während der kurzen Eröffnung eines Windlochs durch die schwingende Zunge nicht so viel Luft herausstürzen kann, um den Druck erheblich zu vermindern."

Vidare ***): "Wenn dagegen die Erregungsstellen der beiden Töne ganz von einander *getrennt* sind, und keinen mechanischen Zusammenhang haben, wenn also z. B. zwei Singstimmen, oder zwei einzelne Blasinstrumente, oder zwei Violinen den Ton angeben, ist die Verstärkung der Combinationstöne durch die Resonanzröhren schwach und zweifelhaft."

Man finner således häraf, att kombinationstonerna hafva ett betydligt inflytande, om *samma luftmassa* försättes uti en häftig rörelse af tvenne angifna toner, såsom uti Sirenen och Harmonium (Physharmonica), men att desamma under andra omständigheter kunna vara af ringa

*) Härtill kunna vi äfven tillägga de s. k. *summationstonerna*, hvilka af HELMHOLTZ blifvit upptäckta och hvilkas svängningstal äro lika med summan af de primära tonernas svängningstal.

**) pag. 245 och 246.

***) pag. 247.

betydighet samt till och med så svaga, att man ej med säkerhet kan visa deras objektiva existens uti den omgifvande yttre luftmassan. Det oaktadt kunna de dock understundom ganska tydligt förnimmas, hvilket HELMHOLTZ antager härleda sig deraf, att örats yttre delar försättas uti en tillräckligt stark kombinerad svängning, hvarigenom kombinationstonerna uppstå uti örat sjelf, utan att på samma gång existera uti den yttre luftmassan. Detta är för öfrigt ganska sannolikt, ty den ringa förstärkning, som erhålles af en med kombinationstonen öfverensstämmande resonator, kan i detta fall endast derigenom förklaras, att örats trumhinna meddelar sina med kombinationstonen öfverensstämmande svängningar åt resonatorns inre luftmassa.

Emedan HELMHOLTZ fäster en hufvudsaklig vikt vid *kombinationstonernas* mer eller mindre störande inverkan på de konsonerande treklangernas *välljud* (Wohlklang), så vilja vi äfven härom yttra några ord och på samma gång särskilt framhålla de kombinationstoner, hvilka med afseende härpå kunna utöfva det största inflytande.

Härom yttrar HELMHOLTZ följande *): "Nach der Art der Intervalle sollte man nun erwarten, dass der Mollaccord $c^0 - \bar{e}^0 - g^0$ eben so gut klinge wie $c^0 - \underline{e}^0 - g^0$, da beide Accorde eine Quinte, eine grosse und eine kleine Terz enthalten. Indessen ist das keineswegs der Fall. Der Wohlklang des Mollaccords ist merklich geringer, als der des Duraccords, und zwar liegt der Grund in den Combinationstönen, welche wir hier noch berücksichtigen müssen." Derefter beräknar han såväl de kombinationstoner, hvilka bildas af endast grundtonerna uti treklängen, som ock de kombinationstoner, hvilka dessa grundtoner bilda med sina första öfvertoner; de förra benämner han kombinationstoner af första ordningen, de sednare deremot kombinationstoner af andra ordningen.

Dessa kombinationstoner kunna vi enklast framställa på följande sätt:

$$1) \text{ Durtreklängen } \underset{4}{c^0} - \underset{\bar{5}}{e^0} - \underset{6}{g^0} \text{ och dess första öfvertoner } \underset{8}{c^1} - \underset{\bar{10}}{e^1} - \underset{12}{g^1}.$$

*) pag. 337.

Hvad nu först och främst *durtreklngen* beträffar, så finna vi här, att kombinations-tonerna af första ordningen (c_2 och c_1) och de lägre af andra ordningen (c_1 och g_1) endast äro underoktaver till treklangens primära toner (c^0 och g^0). Om de högre kombinationstonerna af andra ordningen säger HELMHOLTZ *): "sie sind ausserordentlich schwach, da unter übrigens gleichen Umständen die Intensität der Combinationstöne abnimmt, wenn das Intervall der erzeugenden Töne zunimmt, womit wiederum die hohe Lage der betreffenden Combinationstöne zusammenhängt. Ich habe die tieferen Combinationstöne zweiter Ordnung (c_1 och g_1) am Harmonium mit Hilfe der Resonanzröhren stets leicht hören können, dagegen nicht die höheren ($\#a^0$ och c^1).". Om dessa sednare anmärker han dock, att de möjligen kunna förnimmas uti mycket starka klanger med starka öfvertoner.

Angående *molltreklngen* yttrar han: "Bei den Mollaccorden dagegen bringen schon die leicht hörbaren Combinationstöne erster Ordnung Störungen hervor. Sie liegen zwar noch nicht so nahe an einander, dass sie Schwebungen geben, aber sie liegen ausser der Harmonie."

Visserligen bilda dessa kombinationstoner treklngen ${}^b\bar{a}_3 - {}^b\bar{e}_2 - c_1$, som är en ${}^b\bar{a}$ -durtreklang, men som dock står i mycket nära förwandskap till c -molltreklngen. Ett större inflytande torde väl egentligen de lägre kombinationstonerna af andra ordningen (${}^b\bar{a}_1$ och ${}^b\bar{h}_1$) hafva, emedan dessa tillsammans med den primära tonen c^0 bilda den dissonerande treklngen ${}^b\bar{a}_1 - {}^b\bar{h}_1 - c^0$, hvars toner ligga hvarandra så nära, att sväfnigar måste uppkomma. Emellertid anser HELMHOLTZ de störningar, som uppstå af kombinationstoner af andra ordningen, vara alltför svaga för att gifva mollackordet karaktären af ett dissonerande ackord, men att de dock förorsaka en märkbar tillökning i sträfhhet (*Rauhigkeit*) i jemförelse med durackordet, då man begagnar sig af ett instrument med *ren* stämning.

Nu är att märka, att det störande inflytande, som kombinationstoner och deras sväfnigar kunna hafva på de konsonerande treklngernas välljud, isynnerhet gör sig gällande på sådana instrumenter, hvilka hafva en för alla tonerna gemensam väderlåda, såsom t. ex. Physharmonikan, hvars klangfärg dessutom, tillfölje af öfvertonernas större antal och styrka, är mera skarp och sträf, hvarigenom molltreklngen också måste förefalla något oklar och fördunklad i jemförelse med durtreklngen.

De resultater, till hvilka HELMHOLTZ genom sina undersökningar härutinnan kommit, måste således hufvudsakligen vara gällande för sådana instrumenter som de ofvannämnda. Undersöker man deremot dessa treklnger, då de utföras af särskilda sångstämmor, af sträng- eller blås-instrumenter, så finna vi, att sväfnigarne hos öfvertonerna äro af större betydelse än kombinationstonerna, om hvilka sednare HELMHOLTZ sjelf säger, att de merendels äro så svaga, att man tviflar på deras objektiva existens uti den yttre omgifvande luftmassan.

*) pag. 338.

Vi öfvergå derföre till *sväfningsarne* hos de *konsonerande intervallernas öfvertoner*.

Först och främst märka vi då, att det störande inflytande, dessa sväfningar kunna hafva på intervallernas välljud, måste hufvudsakligen vara beroende af klangfärgen, som på mångfaldigt sätt kan variera. Äro t. ex. de högre öfvertonerna skarpt framträdande, så kunna till och med inom en enda klang dissonanser uppkomma, hvilkas sträfhets har ett ganska märkbart inflytande. Förenas nu tvenne sådana klanger, så förnimma vi, utom de dissonerande intervallerna uti hvarje särskilt klang, äfven sådana dissonanser, hvilka bildas af en öfverton uti den ena med en öfverton uti den andra klangen, hvarigenom en ytterligare tillökning af sträfhets måste uppkomma. Uti sådana klanger äro derföre de sväfningar, hvilka uppstå af nära hvarandra liggande öfvertoner, mycket starkare och tydligare än de, som uppstå af kombinationstonerna. "Aber, säger HELMHOLTZ *), allerdings ist zu bemerken, dass Schwebungen der Combinationstöne viel allgemeiner vorkommen, bei allen Arten von Klängen, Schwebungen der Obertöne dagegen natürlich nur bei Klängen mit deutlich ausgesprochenen Obertönen. Da aber die musikalisch brauchbaren Klänge mit wenigen Ausnahmen reichlich mit kräftigen Obertönen versehen sind, so haben in der Musik die Schwebungen der Obertöne verhältnissmässig eine *viel grössere praktische Wichtigkeit*, als die Schwebungen der schwachen Combinationstöne."

Detta vigtiga inflytande i praktiskt hänseende består egentligen deruti, att *samma* konsonerande intervall klingar olika hos olika musikaliska instrumenter, såväl uti ett högre som uti ett djupare läge, och i följe deraf måste de konsonerande intervallernas ordningsföljd med afseende på välljudet hufvudsakligen vara beroende af klangfärgens beskaffenhet. Man har derföre oupphörligt eftersträfvat att, genom större eller mindre förändringar af klangfärgen hos de mest brukliga musikaliska instrumenterna, åstadkomma en på samma gång både rik och skön klangfärg, som enligt de undersökningar och jemförelser, man anställt med våra musikaliska hufvudinstrumenter, skulle anses bestå deruti, att grundtonens oktav och duodecima (2:dra och 3:dje partialtonerna) kraftigt framträda, derefter 4:de och 5:te partialtonerna med medelmåttig styrka, samt att de derpå följande öfvertoner hastigt aftaga uti tonstyrka. Med en sådan klangfärg till grund har HELMHOLTZ uppställt följande definitioner för dissonerande och konsonerande intervaller *):

"Wenn zwei musikalische Klänge neben einander erklingen, ergeben sich im Allgemeinen Störungen ihres Zusammenklings durch die Schwebungen, welche ihre Partialtöne mit einander hervorbringen, so dass ein grösserer oder kleinerer Theil der Klangmasse in getrennte Tonstösse zerfällt und der Zusammenklang rauh wird. Wir nennen dies Verhältniss *Dissonanz*.

*) pag. 285.

**) pag. 305.

Es giebt aber gewisse bestimmte Verhältnisse zwischen den Schwingungszahlen, bei denen eine Ausnahme von dieser Regel eintritt, wo entweder gar keine Schwebungen sich bilden, oder diese Schwebungen so schwach in das Ohr fallen, dass sie keine unangenehme Störung des Zusammenklanges veranlassen; wir nennen diese Ausnahmefälle *Consonanzen*."

Till de fullkomligaste konsonanserna räknar han sådana intervaller, uti hvilka den ena klangens grundton sammanfaller med en partialton uti den andra klangen, d. v. s. att den förra klangen är en partialklang uti den sednare klangen. Hit höra *oktaven*, *duodeciman* och *dubbeloktaven*, hvilka benämnas *absoluta konsonanser*.

Derefter följa *rena qvinten* och *rena qvarten*, hvilka benämnas *fullkomliga konsonanser*, emedan de kunna förekomma hvar som helst inom tonskalan, utan att någon betydande störning af välljudet uppkommer. Af dessa bildar dock qvarten en öfvergång till de så kallade *medelmåttiga konsonanserna*, hvartill räknas *stora sexten* och *stora tersen*, dels emedan de ej utan störande inverkan på välljudet kunna begagnas uti ett djupare läge, då deremot störningarne uti ett högre läge försvinna till följe af sväfningarnes stora antal, och dels emedan de uti en god musikalisk klangfärg sjelfständigt karakteriseras derigenom, att hvarje liten förstämning af dessa intervaller åstadkommer ganska märkbara sväfningar uti öfvertonerna. Slutligen utgöra *lilla tersen* och *lilla sexten* de så kallade *ofullkomliga konsonanserna*, hvilka merendels icke kunna sjelfständigt framträda, emedan deras gemensamma öfvertoner vanligtvis icke kunna förnimmas hos lilla sexten och sällan hos lilla tersen, och i följe deraf måste en ringa förstämning af dessa intervaller icke nödvändigt åstadkomma sväfningar. Dessutom äro de uti djupare lägen ännu mindre användbara än stora sexten och stora tersen, men betraktas likväl såsom konsonanser framför åtskilliga andra intervaller, hvilka stå på gränsen emellan konsonanser och dissonanser, hufvudsakligen af det skäl, att de, såsom varande oktav- och qvintfyllnader till stora sexten och stora tersen, äro nödvändiga i och för ackordbildningen. "An Wohlklang, säger HELMHOLTZ, ist die verminderte *) Septime 4 : 7 sehr häufig der kleinen Sexte überlegen, nämlich immer dann, wenn der dritte Partialton des Klanges, verglichen mit dem zweiten, verhältnissmässig stark ist, wobei dann die Quinte auf die um einen halben Ton von ihr entfernten Intervalle stärker störend einwirkt, als die Octave auf die von ihr um einen ganzen Ton entfernte kleine Septime. Diese verminderte Septime aber mit anderen Consonanzen zu Accorden verbunden, bringt lauter schlechtere Intervalle hervor als sie selbst ist, 6 : 7, 5 : 7, 7 : 8 u. s. w., und wird deshalb in der heutigen Musik nicht als Consonanz gebraucht."

För att nu erhålla en klar öfversigt af de konsonerande intervallernas såväl koinciderande som ock sins emellan dissonerande öfvertoner, så kunna vi sammanställa desamma på följande sätt:

*) Egentligen den naturliga septiman.

Grundton (1 : 4)	c^0 1	c^1 2	g^1 3	c^2 4	e^2 5	g^2 6	$\sharp a^2$ 7	c^3 8	d^3 9
Oktav (1 : 2)		c^1 1		c^2 2		g^2 5		c^3 4	
Duodecima (1 : 3)			g^1 1			g^2 2			d^3 3
Qvint (2 : 3)	g^0 1		g^1 2		d^2 3	g^2 4		h^2 5	d^3 6
Qvart (3 : 4)	f^0 1	f^1 2		c^2 3		f^2 4	a^2 5	c^3 6	
Stor sext (3 : 5)	a^0 1			a^1 2	e^2 3		a^2 4		$\sharp c^3$ 5
Stor ters (4 : 5)	e^0 1	e^1 2	h^1 3		e^2 4	$\sharp g^2$ 5		h^2 6	$\sharp\sharp c^3$ 7
Liten ters (5 : 6)	$\flat e^0$ 1	$\flat e^1$ 2	$\flat h^1$ 3		$\flat e^2$ 4	g^2 5		$\flat h^2$ 6	$\sharp c^3$ 7
Liten sext (5 : 8)	$\flat a^0$ 1		$\flat a^1$ 2		$\flat e^2$ 3		$\flat a^2$ 4	c^3 5	

Häraf finna vi nu, att både oktavens och duodecimans partialtoner innehållas uti grundtonens klang, men emedan, inom en viss begränsning, ett färre antal af den sednares partialtoner koincidera med duodecimans än med oktavens, så sammansmälter grundtonens klang mera med oktavens än med duodecimans klang. Af qvintens partialtoner sammanfalla den 2:dra, 4:de och 6:te med grundtonens 3:dje, 6:te och 9:de, men redan i detta intervall förekomma främmande elementer, nemligen 1:sta, 3:dje och 5:te partialtonerna, hvilka ej innehållas uti grundtonens klang, och således måste qvinten hafva till grundtonen en svagare förvandtskap, än oktaven och duodeciman. Qvartens förvandtskap är ännu svagare än qvintens, emedan endast 3:dje och 6:te partialtonerna koincidera med grundtonens 4:de och 8:de; dessutom framträder ett dissonerande intervall (en stor halftön) emellan qvartens 4:de (f^2) och grundtonens 5:te partialton (e^2), hvars störande inslytande tillväxer med partialtonernas intensitet.

Häruti ligger måhända till en del grunden till den långvariga strid, som, angående qvartens konsonerande eller dissonerande egenskap, uppkommit emellan äldre theoretici och som fortgått ända till nyare tider. HELMHOLTZ *) omnämner en af *Dehn* år 1840 utgifven harmonilära, uti hvilken det påståendet ännu fasthålles, att qvarten måste såsom dissonans behandlas och upplösas.

*) pag. 309.

Beträffande terser och sexter, så hafva dessa en ännu svagare förvandtskap till grundtonen, och i följe deraf hafva de först under en sednare period blifvit använda, allt eftersom den flerstämmiga eller harmoniska musiken hunnit utvecklas.

Anm. FRANCO VON CÖLN var den förste, som mot slutet af 12:te århundradet upptog terserna bland de konsonerande intervallerna; sedermera, under 13:de och 14:de århundradet, började man att äfven anse sexterna såsom konsonanser. För öfrigt bibehöll man dock det *pythagoreiska* tonsystemet ända tills ZARLINO år 1558 införde stora tersen (4:5) i stället för pyth. tersen (64:81), hvarigenom vår nuvarande diatoniska tonskala uppkom.

Af de konsonerande intervallerna kunna vi nu, om vi endast fästa oss vid klangens sex första partialtoner, sammansätta den diatoniska skalan. Taga vi t. ex. c^0 till grundton (tonika), så stå följande intervaller uti den närmaste förvandtskap till densamma, nemligen:

oktaven (c^1), *qvinten* (g^0), *kvarten* (f^0), *stora sexten* (a^0) och *stora tersen* (e^0).

Häraf erhålla vi till en början följande tonskala:

$$c^0 - - e^0 - f^0 - g^0 - a^0 - - c^1.$$

Men för att nu kunna dela de alltför stora intervallerna $c^0 - e^0$ och $a^0 - c^1$, så måste vi uppsöka de toner, hvilka stå i nära förvandtskap till qvinten g^0 . Af dessa medtaga vi blott följande:

underkvarten (d^0) och *stora tersen* (h^0).

Insätta vi dessa toner uti ofvanstående tonserie, så uppkommer den så kallade *diatoniska durskalan*, som har följande utseende:

$$\begin{array}{cccccccc} c^0 & - & d^0 & - & e^0 & - & f^0 & - & g^0 & - & a^0 & - & h^0 & - & c^1 \\ 1 & & 9 & & 5 & & 4 & & 3 & & 5 & & 15 & & 2 \\ & & 8 & & 4 & & 5 & & 2 & & 5 & & 8 & & \\ 24 & & 27 & & 30 & & 32 & & 36 & & 40 & & 45 & & 48. \end{array}$$

Denna tonskala kunna vi äfven benämna *tonisk skala*, emedan alla dess toner utgöra *partialtoner* uti en *tonisk klang*, hvars toniska grundton är f_5 .

Invertera vi nu den toniska skalan på det sätt, att vi nedstiga från tonen c^1 med samma intervaller och i samma ordning, som dessa följa på hvarandra uti den toniska skalan i uppstigande, så erhålla vi följande tonskala:

$$\begin{array}{cccccccc} c^0 & - & {}^b\bar{d}^0 & - & {}^b\bar{e}^0 & - & f^0 & - & g^0 & - & {}^b\bar{a}^0 & - & {}^b\bar{h}^0 & & c^1 \\ 2^{-1} & & \left(\frac{15}{8}\right)^{-1} & & \left(\frac{5}{5}\right)^{-1} & & \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & & \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} & & \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} & & \left(\frac{9}{8}\right)^{-1} & & 1 \\ 48^{-1} & & 45^{-1} & & 40^{-1} & & 36^{-1} & & 32^{-1} & & 30^{-1} & & 27^{-1} & & 24^{-1} \end{array}$$

Denna tonskala benämna vi *öfvertonisk skala*, emedan alla dess toner utgöra *underpartialtoner* uti en *öfvertonisk klang*, hvars öfvertoniska grundton är g^5 .

Den öfvertoniska tonskalan återfinna vi hos de gamle Grekerna, som gäfvo densamma benämningen *dorisk skala* (phrygiska kyrkotonarten). HELMHOLTZ upptager den äfven under benämningen *Sextengeschlecht*.

Anm. Vi komma längre fram att närmare taga i betraktande de treklanger, såväl konsonerande som dissonerande, hvilka innehållas uti den toniska och öfvertoniska skalan.

§. 9.

Sedan vi nu framställt de konsonerande treklangernas egenskaper och tillika visat, huru olika dessa treklanger blifvit uppfattade, så vilja vi nu betrakta saken från en annan synpunkt, som dock står uti ett nära samband med sjelfva klangbegreppet, såväl i toniskt som i öfvertoniskt hänseende.

Emedan HELMHOLTZ stödjer sig på *sin* princip för klangförvandtskapen, så måste han följaktligen uppfatta både dur- och molltreklangerna uteslutande såsom toniska, hvarigenom molltreklangen, såsom varande en konsonerande treklang, förlorar något af den betydelse, som uti *harmoniskt* hänseende tillkommer densamma.

För öfrigt är begreppet *välljud* (Wohlklang) något obestämdt och subjektift, isynnerhet då man grundar detsamma på det störande inflytande, som föranledes af kombinationstoner och sväfningar, hvilka sednares inverkan hufvudsakligen är beroende af klangfärgens beskaffenhet. Ty ett intervall såväl som en treklang, de må utföras af hvilka musikaliska instrumenter som helst, måste dock alltid hafva sin egendomliga harmoniska betydelse, som ligger till grund för en rationel musiktheori. Deremot äro de resultater, till hvilka HELMHOLTZ genom sina undersökningar angående kombinationstoner och sväfningar kommit, och hvilka utgöra grunden till en förbättrad *dissonanstheori*, af största vikt för *instrumenteringskonsten*, som i våra dagar spelar en mycket framstående rol. Här har HELMHOLTZ anskaffat en regulator, som vi särskilt vilja rekommendera hos nutidens moderna tonsättare, och som åtminstone i någon mån torde hämma den öfverdrifna och naturvidriga instrumentering, hvartill en och annan esomoftast gör sig skyldig.

Hvad nu öfvertonerna beträffar, så fäster HAUPTMANN icke någon synnerlig vikt vid dessa, utan uppfattar i stället de konsonerande treklangerna efter det inbördes förhållande, som treklangsbeståndsdelarne hafva till hvarandra. Han betraktar molltreklangen (den omvända durtreklangen) såsom utgående från en negativ enhet, som är det positift *bestämda* uti densamma, då deremot enheten uti durtreklangen är det positift *bestämmande*. Molltreklangen med sin enhet i *höjden* sträfvar *nedåt*, durtreklangen med sin enhet i *djupet* sträfvar *uppåt*. "Wie, säger HAUPTMANN *), in den sinkenden Zweigen der Trauerweiden, gegen den strebenden Lebensbaum, finden wir darum auch im Mollaccorde den Ausdruck der Trauer wieder."

*) Die Natur der Harmonik und der Metrik, pag. 32.

OETTINGEN fäster sig hufvudsakligen vid molltreklangens *gemensamma* öfverton, som af honom benämnes *phonisk* *) *öfverton*, emedan de särskilda klangerna på denna treklangs beståndsdelar liksom framsjunga densamma. Denna öfverton förnimmes också i verkligheten ganska tydligt uti ett klangrikt instrument.

Han skiljer derföre molltreklangen från durtreklangen derigenom, att den föras toner *hafva* en gemensam öfverton och att den sednares toner *äro* gemensamma beståndsdelar uti en tonisk klang.

Vi hafva förut (§. 8, pag. 24) fäst uppmärksamheten vid det symmetriska läge, som dessa treklanger intaga uti den toniska och öfvertoniska klangen, och dessutom visat, att den *först framträdande* treklangen uti en *tonisk* klang är *durtreklangen*, som bildas af 4:de, 5:te och 6:te partialtonerna och hvars *lägsta* ton öfverensstämmer med klangens toniska grundton, samt att den *först framträdande* treklangen uti en *öfvertonisk* klang är *molltreklangen*, som bildas af 4:de, 5:te och 6:te underpartialtonerna och hvars *högsta* ton öfverensstämmer med denna klangens öfvertoniska grundton.

Gifva vi nu noga akt uppå de 6 första partialtonerna uti den toniska klangformeln A (§. 5), så finna vi, att endast *en och samma* treklang, fastän uti olika lägen, kan bildas af trenne bland dessa toner; och då nu härtill kommer, att deras intensitet i allmänhet är betydligt större än hos de derpå följande partialtonerna, så kunna vi anse denna durtreklang såsom den toniska klangens hufvudbeståndsdel.

Detsamma kunna vi äfven säga om den molltreklang, som bildas af trenne bland den öfvertoniska klangens 6 första underpartialtoner (se formeln B, §. 5), nemligen, att denna treklang utgör hufvudbeståndsdelen uti den öfvertoniska klangen.

Vi hafva förut (pag. 13) betecknat toniska klangen på c^0 med $c^0 (+)$ och öfvertoniska klangen på c^0 med $c^0 (-)$; uti den förra är alltså c -durtreklangen hufvudbeståndsdelen, uti den sednare f -molltreklangen. På grund häraf kunna vi således anse c -durtreklangen representera den toniska c -klangen och f -molltreklangen den öfvertoniska c -klangen, hvilket vi i allmänhet kunna uttrycka på följande sätt:

$$\left. \begin{aligned} c - e - g &= c (+) \\ f - \bar{a} - c &= c (-) \end{aligned} \right\}$$

Antaga vi nu till en början, att klangfärgen är så beskaffad, att intensiteten hos partialtonerna är omvändt proportionel med deras ordningstal, så måste, om vi beteckna intensiteten hos första partialtonen c^0 uti toniska klangen på c^0 med talet 1, durtreklangens $c^2 - e^2 - g^2$

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

*) Af gr. *φωνήω*.

intensitet vara $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$. Vidare måste, om intensiteten hos hvar och en af molltreklangens

$f_3 - \bar{a}_3 - c_2$ toner betecknas med 1, intensiteten hos denna treklangs gemensamma öfvertton

(partialton) c^0 likaledes vara $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$; ty c^0 är 4:de partialtonen till c_2 , 5:te till $\bar{a}_3$ och 6:te till f_3 .

Men emedan båda dessa treklanger äro symmetriskt belägna å ömse sidor om grundtonen c^0 , så måste denna ton hafva samma förvandtskap till molltreklangens toner som till de motsvarande uti durtreklangen. För att nu kunna uttrycka denna likhet uti förvandtskap, så utgå vi från den *hypotes*, att *intensitetsgraden hos underpartialtonerna uti den öfvertoniska klangen följer alldeles samma lag som hos partialtonerna uti den toniska klangen*. Detta vill med andra ord säga, att, om toniska grundtonen uti en tonisk klang (med en gifven klangfärg) har samma intensitet som öfvertoniska grundtonen uti en öfvertonisk klang, *intensiteten är densamma hos de partial- och underpartialtoner, hvilkas ordningstal äro lika*.

Beteckna vi alltså öfvertoniska grundtonens c^0 intensitet med talet 1, så blir, emedan c_2 är den 4:de, $\bar{a}_3$ den 5:te och f_3 den 6:te underpartialtonen till c^0 , molltreklangens $f_3 - \bar{a}_3 - c_2$ intensitet $= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.

Häri genom erhålla vi således alldeles samma uttryck för molltreklangens som för durtreklangens intensitet, och i följe deraf säga vi, att *molltreklangen, såsom öfvertonisk betraktad, är lika mycket konsonerande som durtreklangen såsom tonisk*.

På samma sätt komma vi äfven till det resultat, att *molltreklangen, såsom tonisk betraktad, är lika mycket toniskt dissonerande, som durtreklangen, såsom öfvertonisk betraktad, är öfvertoniskt dissonerande* (se pag. 25).

Att ofvanstående hypotes ej saknar grund, vilja vi ådagalägga på följande sätt.

Först och främst finna vi, att durtreklangens $c^2 - e^2 - g^2$ beståndsdelar, hvilka äro tre på hvarandra följande partialtoner uti en tonisk klang, ej hafva samma intensitet, emedan mångfaldiga undersökningar angående klangfärgen hafva visat, att partialtonernas intensitet uti en god musikalisk klangfärg aftager i samma mån, som deras ordningstal tillväxer; följaktligen är intensiteten större hos c^2 än hos e^2 och g^2 . Skall derföre en sådan treklang kunna klinga fullt tillfredsställande för ett fint utbildadt musikaliskt öra, så bör grundtonen c^2 starkare framträda än tersen e^2 och qvinten g^2 .

Anm. Härutinnan ligger måhända förklaringen, hvarföre harmoniläran uti den fyrstämmiga satsen förskrifver grundtonens fördubbling framför tersens och qvintens.

Omvänt blir förhållandet med molltreklangens $f_3 - \bar{a}_3 - c_2$. Här måste intensiteten hos f_3 vara svagare än hos $\bar{a}_3$ och c_2 . Ty emedan denna treklang ej är toniskt konsonerande, så måste man söka till att åstadkomma en svagare intensitet hos 5:te partialtonen $\underline{a}_1$ uti toniska klangen på f_3 och hos 4:de partialtonen $\bar{a}_1$ uti toniska klangen på $\bar{a}_3$, hvilka tillika med 3:dje partialtonen g_1 uti toniska klangen på c_2 bilda det skarpt dissonerande ackordet $g_1 - \bar{a}_1 - \underline{a}_1$. Under den förutsättning således att klangfärgen hos molltreklangens beståndsdelar f_3 , $\bar{a}_3$ och c_2 förblifver oförändrad, så behöfva vi endast minska intensiteten hos treklangens lägsta toner f_3 och $\bar{a}_3$, hvarigenom också intensiteten hos deras partialtoner $\underline{a}_1$ och $\bar{a}_1$ blifver förminskad.

Dessutom uppkommer en annan dissonans ($\bar{e}_1 - f_1$), nemligen af 4:de partialtonen f_1 uti toniska klangen på f_3 och af 3:dje partialtonen $\bar{e}_1$ uti toniska klangen på $\bar{a}_3$, hvilken dissonans äfven genom ofvannämnda intensitetsförändring blifver förmildrad.

Anm. Man bör derföre, i motsats till durtreklangen, uti den fyrstämmiga satsen undvika fördubblingar af molltreklangens grundton och lilla ters.

Häraf finna vi alltså, att *välljudet* hos såväl dur- som molltreklangens måste vara beroende dels af intensiteten hos dessa treklangers beståndsdelar och dels af sjelfva klangfärgen, hvilken sednare kan på mångfaldigt sätt variera. Detsamma gäller för öfrigt om hvilket konsonerande intervall som helst. Deremot måste en treklangs eller ett intervalls *harmoniska betydelse* förblifva oförändrad, emedan densamma uteslutande är beroende af den *förvandtskap*, som treklangens eller intervallens beståndsdelar hafva till hvarandra. Det är derföre af vigt att på något sätt bestämdt *uttrycka* den olika förvandtskapsgrad, hvarigenom intervallerna i harmoniskt hänseende karakteriseras, på det att vi må kunna bedömma deras större eller mindre grad af konsonans.

Hvad nu först och främst sjelfva begreppet *förvandtskap* beträffar, så uppställer HELMHOLTZ följande definition *): "*Verwandt im ersten Grade nennen wir Klänge, welche zwei gleiche Partialtöne haben; verwandt im zweiten Grade solche, welche mit demselben dritten Klange im ersten Grade verwandt sind.*"

Till förvandtskapen af första graden hänför han sådana klanger, hvilkas grundtoner sines emellan bilda konsonerande intervaller, d. v. s. att uti intervallbeståndsdelarnes svängningstal måste talen 3 och 5 hvar för sig endast förekomma *en enda gång* såsom faktorer, eller med andra ord, att svängningstalen tillhöra endast *en* qvint- eller tersgeneration. Förekomma deremot talen 3 och 5 antingen samtidigt eller hvar för sig två eller flera gånger såsom faktorer uti intervallernas svängningstal, så säges förvandtskapen vara af andra, tredje graden o. s. v.

*) pag. 407.

För att nu uttrycka skillnaden uti konsonans emellan intervallerna inom första förvandtskapsgraden, så säger han: *"Je stärker die beiden übereinstimmenden Partialtöne sind im Verhältniss zu den übrigen Partialtönen zweier im ersten Grade verwandten Klänge, desto stärker ist die Verwandtschaft, desto leichter werden Sänger und Hörer das Gemeinsame beider Klänge zu fühlen wissen."*

Alltså ju lägre den gemensamma partialtonens ordningstal är, desto starkare är förvandtskapen. Häraf följer, att, alldenstund partialtoner med högre ordningstal i allmänhet äro svagare än de med lägre ordningstal, tvenne klangers förvandtskap är i allmänhet svagare, ju högre de gemensamma partialtonernas ordningstal är.

Vi deremot hålla oss fast vid den toniska och öfvertoniska klangens egenskaper och betrakta intervallerna såsom beståndsdelar uti dessa klangar. Men emedan, såsom vi förut (pag. 16) visat, ett intervall, hvilket som helst, är lika långt aflägsset från sin toniska som från sin öfvertoniska grundton, så måste följaktligen förvandtskapen emellan ett intervalls beståndsdelar förblifva densamma, antingen intervallet betraktas såsom toniskt eller öfvertoniskt. Bestämman vi derföre förvandtskapsgraden efter intervalllets läge till dessa grundtoner, så kunna vi uttala följande sats: *"Ju närmare intervallbeståndsdelarne äro belägna intill toniska eller öfvertoniska grundtonen, desto starkare är förvandtskapen."*

Intervalllets beståndsdelar blifva då betraktade såsom partial- eller underpartialtoner, och i följe deraf kunna vi också säga, att förvandtskapen är beroende af dessa toners ordningstal uti den toniska eller öfvertoniska klangen. Men emedan dessa ordningstal äro alldeles lika med de koinciderande partialtonernas ordningstal uti toniska klangerna på intervalllets egna toner, så måste förvandtskapen äfven vara beroende af de koinciderande partialtonernas ordningstal, hvilket fullkomligt öfverensstämmer med HELMHOLTZ's definition; ty ju mindre en partialtons ordningstal är, desto större är i allmänhet partialtonens intensitet.

Vi kunna således äfven uttala följande sats: *"Ju större intervallbeståndsdelarnes intensitet är uti den toniska eller öfvertoniska klangen, desto starkare är förvandtskapen."*

Vore det nu möjligt att uttrycka intensiteten uti en funktion af ordningstalet, så skulle vi derigenom kunna erhålla ett mått för förvandtskapen. Men detta förutsätter också på samma gång en bestämd klangfärg, emedan intensiteten hos en och samma partialton uti tvenne eller flera klangar kan, alltefter klangfärgens beskaffenhet, vara mycket olika, oaktadt grundtonens intensitet och absoluta tonhöjd förblifva oförändrade. Äfven ett och samma intervalls välljud, som annars tillika med klangfärgen undergår förändring, skulle genom antagandet af en bestämd klangfärg blifva konstant.

Allt beror således i detta afseende på klangfärgen, som på mångfaldigt sätt varierar, så att icke engång tvenne musikaliska instrumenter, de må vara arbetade på alldeles samma sätt och med samma omsorg, kunna framvisa en lika klangfärg. Till och med människorösten, som

är ett naturligt instrument, företer en stor olikhet i detta afseende, ty det är icke möjligt att uppleta tvenne röster af samma register, hvilka hafva samma klangfärg. Här af kunna vi till en del förklara, hvarföre ett och samma musikanummer åstadkommer ett olika intryck, oaktadt det utföres af i öfrigt lika röster med samma musikaliska utbildning.

Träffande yttrar RADAU *): "Der Klang der menschlichen Stimme ist auch gewissermassen ein psychisches Element. Er macht die Stimme angenehm, hinreissend, einschmeichelnd, oder herausfordernd, abstossend, widerlich. Er drückt, wie der Blick des Auges, den Charakter aus."

I det föregående hafva vi till en början antagit en viss klangfärg, för att bestämdt kunna uttrycka intensiteten; men emedan denna klangfärg är af den beskaffenhet, att partialtonernas intensitet är omvänt proportionel med ordningstalet, så erhålla vi icke något bestämdt ändligt uttryck för klangens totalintensitet, och derföre måste vi uppsöka en annan relation emellan dessa toners intensitet och ordningstal.

Ty enligt detta antagande skulle, om vi taga grundtonens (första partialtonens) intensitet till enhet, uttrycket för summan af alla partialtonernas, d. v. s. hela klangens, intensitet blifva:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n},$$

i hvilken serie alltså gränsvärdet för $\frac{1}{n} = 0$, om $n = \infty$.

Antaga vi nu, att partialtonernas antal är oändligt, eller med andra ord, att klangen är fullständig (se §. 5), så måste också denna serie vara oändlig och i följe deraf divergerande.

Uttrycka vi deremot summan af partialtonernas intensitet genom följande serie:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots \text{in inf.},$$

som är konvergerande, om $p > 1$, så erhålla vi derigenom på samma gång ett bestämdt ändligt uttryck för hela klangens intensitet.

Denna serie uttrycker alltså en ny relation emellan intensiteten och ordningstalet (eller svängningstalet, om grundtonens svängningstal betecknas med 1), bestående deruti, att *partialtonernas intensitet är omvänt proportionel med en potens på ordningstalet*. Är nu tillika *potensexponenten* (p) *större än talet 1*, så representerar denna serie en generel klangfärg af den beskaffenhet, att vi derigenom äro i stånd att uttrycka förvandtskapen emellan hvilka klanger som helst, såväl toniska som öfvertoniska.

Denna klangfärg benämna vi den *normala klangfärgen*, hvilken vi vilja lägga till grund för både konsonans- och dissonanstheorien.

*) Die Lehre vom Schall. München, 1869 (Deutsche Originalausgabe).

Utsträcka vi nu ofvanstående definition på normal klangfärg äfven till underpartialtonerna uti den öfvertoniska klangen, så kunna vi i öfverensstämmelse med vår förra hypotes: "att intensitetsgraden hos underpartialtonerna följer alldeles samma lag som hos partialtonerna," säga, att *underpartialtonernas intensitet är omvändt proportionel med en potens på ordningstalet.*

Härigenom omfattar således den *normala klangfärgen såväl den toniska som den öfvertoniska klangen.*

§. 10.

Vi vilja nu använda den normala klangfärgen på de konsonerande intervallerna, hvilkas förvandtskapsgrad vi bestämma under den förutsättning, att deras beståndsdelar utgöra partialtoner uti en och samma toniska klang.

Äro alltså a och b (hela tal och $a < b$) intervallbeståndsdelarnes svängningstal, så blir, om toniska grundtonens intensitet är 1, intervalllets intensitet uttryckt genom $\frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p}$, hvilken summa således utgör måttet på förvandtskapen.

Emedan $p > 1$, så kunna vi numeriskt beräkna intensiteten, om vi t. ex. antaga $p = \frac{3}{2}$ och $p = 2$.

Tillika uppställa vi den ordningsföljd, enligt hvilken förvandtskapen blifvit bestämd af HELMHOLTZ och OETTINGEN, af hvilka den förre utgår från kombinationstonernas mer eller mindre störande inverkan på de konsonerande treklangerne, den sednare deremot från den principen, att förvandtskapen är beroende af produkten af intervallbeståndsdelarnes svängningstal på det sätt, att ju mindre denna produkt är, desto starkare är förvandtskapen. Äro således a och b dessa svängningstal, så uttrycker OETTINGEN måttet på förvandtskapen genom $\frac{1}{ab}$.

Vi erhålla nu följande värden för de konsonerande intervaller, hvilka ej öfverstiga två oktavers omfång.

Intervaller.	Svängnings- tal.	Beteckning.	$\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$	Ordnings- följd.	Enligt HELMHOLTZ.	Enligt OETTINGEN.
Oktav	1 : 2	$c_2 - c_1$	1,354	1,250	1	1	1
Duodecima	1 : 3	$c_2 - g_1$	1,193	1,111	2	2	2
Dubbeloktav	1 : 4	$c_2 - c^0$	1,125	1,063	3	6	3
Qvint	2 : 3	$c_1 - g_1$	0,546	0,361	4	3	4
Stor decima	2 : 5	$c_1 - e^0$	0,443	0,290	5	9	5
Qvart	3 : 4	$g_1 - c^0$	0,318	0,174	6	4	6
Stor sext	3 : 5	$g_1 - e^0$	0,282	0,151	7	10	7
Undecima	3 : 8	$g_1 - c^1$	0,237	0,127	8	7	9
Stor tredecima	3 : 10	$g_1 - e^1$	0,224	0,121	9	13	10
Stor ters	4 : 5	$e^0 - e^0$	0,214	0,103	10	5	8
Liten ters	5 : 6	$e^0 - g^0$	0,157	0,068	11	8	11
Liten sext	5 : 8	$e^0 - c^1$	0,134	0,056	12	11	12
Liten decima	5 : 12	$e^0 - g^1$	0,114	0,047	13	12	13
Liten tredecima	5 : 16	$e^0 - c^2$	0,105	0,044	14	14	14

Anm. Hade vi betraktat intervallbeståndsdelarne såsom underpartialtoner uti en och samma öfvertoniska klang, så hade vi erhållit alldeles samma ordningsföljd för de konsonerande intervallerna, emedan deras ordningstal i detta fall endast blifvit inverterade.

Af ofvanstående beräkning finna vi nu, att den af oss bestämda förvandtskapsgraden hos de konsonerande intervallerna i det närmaste fullkomligt öfverensstämmer med de resultat, till hvilka OETTINGEN genom sin princip kommit. Skillnaden består blott deruti, att enligt hans beräkning är stora tersen (4 : 5) ett mera konsonerande intervall än undeciman (3 : 8) och stora tredeciman (3 : 10). Detta är för öfrigt ej af någon vidare betydighet, emedan skillnaden i förvandtskap emellan dessa trenne intervaller är ganska ringa, hvilket också tydligen visar sig af de värden på deras intensitet, som af oss blifvit funna. Deremot kan han i sjelfva verket ej föredraga stora tredeciman (3 : 10) framför lilla tersen (5 : 6), eller tvärtom, emedan enligt hans princip måste dessa intervaller bekomma samma värde, nemligen $\frac{1}{30}$.

Beträffande den ordningsföljd, som HELMHOLTZ härleder af den inverkan, som kombinationstonerna vid bildandet af de konsonerande ackorderna utöfva, så afviker densamma betydligt från den af oss framställda. HELMHOLTZ indelar nemligen i detta afseende de konsonerande intervallerna uti fyra grupper. Till den första hänför han de intervaller, hvilkas kombinations-toner endast äro oktavfördubblingar af den ena af intervallets toner; dessa äro *oktaven*, *qvinten*, *duodeciman*, *qvarten* och *stora tersen*. Den andra gruppen innefattar endast *dubbeloktaven*,

hvars kombinationston är duodeciman till detta intervalls lägsta ton. Fördubblar man alltså ett konsonerande ackords grundton med dubbeloktaven, så verkar icke detta störande på ackordet; men deremot inträder en störning, om man på detta sätt fördubblar ackordets ters eller qvint. Till tredje gruppen räknar han de intervaller, hvilkas beståndsdelar tillsammans med kombinationstonen bilda ett durackord, och i följe deraf uppkommer icke någon störning uti durtreklangen, men väl uti molltreklängen; dessa intervaller äro *undeciman*, *lilla tersen*, *stora deciman*, *stora* och *lilla sexten*. Deremot kan man hvarken uti dur- eller molltreklängen använda fjärde gruppens intervaller, utan att kombinationstonerna verka störande; hit räknas *lilla deciman*, *stora* och *lilla tredeciman*.

Men nu har HELMHOLTZ uppställt en annan ordningsföljd för de konsonerande intervallerna, hvilken han härleder af det inflytande, som öfvertonernas sväfningar utöfva på dessa intervallers välljud. Härvid tager han intervallerna endast i och för sig i betraktande och utan afseende på deras förening med andra intervaller. Han erhåller då följande ordning: *oktaven*, *duodeciman*, *dubbeloktaven*, *qvinten*, *kvarten*, *stora sexten*, *stora tersen*, *lilla tersen* och *lilla sexten*.

För att vidare bestämma konsonansgraden för de 5 återstående intervallerna, hvilka alla öfverskrida oktavens omfång, så uppställer han följande regel: *Om ett intervall utvidgas med en oktav, så blifver detsamma förbättradt (i välljud), såvida svängningstalet till intervalllets lägsta ton är ett jemnt tal; deremot försämras intervallet, om detta svängningstal är ett udda tal.*

Med iakttagande af denna regel finna vi således, att duodeciman ($1:3$) och stora deciman ($2:5$) äro hvar för sig *mera* konsonerande än deras motsvarande intervaller, nemligen qvinten ($2:3$) och stora tersen ($4:5$); men att deremot undeciman ($3:8$), stora tredeciman ($3:10$), lilla deciman ($5:12$) och lilla tredeciman ($5:16$) äro hvar för sig *mindre* konsonerande än kvarten ($3:4$), stora sexten ($3:5$), lilla tersen ($5:6$) och lilla sexten ($5:8$) resp.

Jemföra vi nu dessa resultater, till hvilka HELMHOLTZ, med afseende på sväfningarnas inflytande på de konsonerande intervallernas välljud, kommit, med den af oss bestämda förvandtshetsgraden, så visar sig en i det hufvudsakliga fullkomlig öfverensstämmelse.

§. 11.

Vi öfvergå nu till de konsonerande treklangerne (dur- och molltreklängen), hvilkas konsonansgrad vi vilja bestämma efter samma princip.

Hittills hafva vi endast betraktat dessa treklangers beståndsdelar uti ett bestämdt läge, så att grundtonen (tonikan) alltid utgjort treklängens lägsta och qvinten dess högsta ton, d. v. s. att

t. ex. durtreklngen förekommit endast under formen $c^0 - e^0 - g^0$. Men emedan vi alltid återfinna en durtreklngs beståndsdelar bland partialtonerna uti en tonisk klang, och emedan deras ordningstal undergå förändring alltefter de olika lägen, som dessa beståndsdelar uti densamma intaga, så följer häraf, att äfven treklngens intensitet på samma gång förändras, af hvilken konsonansgraden enligt vår princip är beroende.

Utgå vi alltså från durtreklngens ursprungliga läge $c^0 - e^0 - g^0$, som gemenligen kallas *grundackordet*, så erhålla vi till en början tvenne nya lägen, genom att efterhand låta treklngens ters och qvint utgöra ackordets lägsta ton, nemligen $e^0 - g^0 - c^1$ och $g^0 - c^1 - e^1$.

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 6 & 8 & 6 & 8 & 10 \\ & & & 5 & 4 & 5 \end{array}$$

Dessa ackorder benämner man *grundackordets förvexlingar* eller *omvändningar* (Umkehrungen), af hvilka den förra kallas *sextackord* och den sednare *kvartsextackord*.

Uti dessa trenne ackorder finna vi, att beståndsdelarne ligga hvarandra så nära som möjligt och inom oktavens omfång, och derföre kallar man också ett sådant läge *sammanträngdt*. Skilja vi deremot ackordets särskilda toner genom oktavförflyttningar mer och mer från hvarandra, så uppkomma en mängd olika lägen, hvarigenom konsonansgraden på samma gång förändras. Öfverskrida vi icke *två* oktavers omfång, så finna vi, att durtreklngen förekommer uti 12 olika lägen, hvilka kunna uppstå på följande sätt.

Bibehålles t. ex. grundtonen c^0 uti grundackordet $c^0 - e^0 - g^0$, så erhålla vi tre nya lägen, om tersen e^0 och qvinten g^0 antingen hvar för sig eller ock båda på en gång uppflyttas med *en* oktav. På samma sätt åstadkomma sextackordet $e^0 - g^0 - c^1$ och kvartsextackordet $g^0 - c^1 - e^1$ hvardera tre nya lägen, om deras lägsta ton förblifver oförändrad.

Antaga vi nu, att alla dessa ackorders beståndsdelar äro partialtoner uti en tonisk klang, så kunna vi lätt beräkna deras intensitet uti den normala klangfärgen.

Äro alltså a, b, c treklngens svängningstal (= partialtonernas ordningstal), så blir, om toniska grundtonens intensitet tages till enhet, allmänna uttrycket för treklngens intensitet eller konsonansgrad $\frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p} + \frac{1}{c^p}$, hvarest $p > 1$.

Antaga vi såsom förut $p = \frac{5}{2}$ och $p = 2$, så erhålla vi följande värden för toniska (dur-) treklngens alla 12 lägen inom två oktavers omfång.

Treklängernas svängningstal.	Beteckning.	$\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{c^{\frac{2}{3}}}$	$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$	Ordnings- följd.	Enligt HELMHOLTZ.	Enligt OETTINGEN.
2 : 3 : 5	$c_1 - g_1 - e^0$	0,636	0,404	1	1	1
2 : 5 : 6	$c_1 - e^0 - g^0$	0,544	0,518	2	3	2
3 : 4 : 5	$g_1 - c^0 - e^0$	0,407	0,214	3	2	3
3 : 4 : 10	$g_1 - c^0 - e^1$	0,349	0,184	4	7	4
3 : 5 : 8	$g_1 - e^0 - c^1$	0,326	0,167	5	5	7
4 : 5 : 6	$c^0 - e^0 - g^0$	0,282	0,130	6 (7)	4	5
3 : 8 : 40	$g_1 - c^1 - e^1$	0,268	0,137	7 (6)	8	6
4 : 5 : 12	$c^0 - e^0 - g^1$	0,239	0,109	8	9	9
5 : 6 : 8	$e^0 - g^0 - c^1$	0,202	0,083	9	6	8
5 : 6 : 16	$e^0 - g^0 - c^2$	0,173	0,072	10	11	11
5 : 8 : 12	$e^0 - c^1 - g^1$	0,158	0,063	11	10	10
5 : 12 : 16	$e^0 - g^1 - c^2$	0,129	0,054	12	12	12

Anm. Vi hafva betraktat ofvanstående ackorders beståndsdelar såsom partialtoner uti toniska klangen på c_1 såsom grundton, hvars intensitet vi antagit vara 1. Vidare äro dessa ackorders lägen ordnade efter värdena på intensiteten, då $p = \frac{3}{2}$. Siffrorna inom parentes tillhöra den ordningsföljd, som uppkommer af $p = 2$.

Jemföra vi nu ofvanstående trenne ordningsföljder med hvarandra, så visar sig, att vi mindre afvika från OETTINGEN än från HELMHOLTZ; deremot afviker den sednare från den förre ungefär lika mycket som från oss. För öfrigt äro dessa afvikelser ej af någon stor betydighet.

Beträffande durtreklängens *sammanträngda* lägen, så öfverensstämma vi alla tre deruti, att *quartsextackordet* (3 : 4 : 5) föredrages framför *grundackordet* (4 : 5 : 6), detta sednare åter framför *sextackordet* (5 : 6 : 8). Ty enligt HELMHOLTZ intaga dessa ackorder lägena 2, 4, 6, enligt OETTINGEN 3, 5, 8 och hos oss 3, 6, 9.

En anmärkningsvärd omständighet är, att endast uti de fyra sista lägena, hvilka enligt vår beräkning äro de minst konsonerande, utgör treklängens ters lägsta tonen uti ackordet. Dessa lägen, isynnerhet de tre sista, användas derföre också mindre ofta än de föregående.

HELMHOLTZ bestämmer konsonansgraden på grund af kombinationstonernas inflytande och anser de 6 första ackordlägena bäst konsonerande, emedan kombinationstonerna ligga inom ackordets egen harmoni; deremot förekomma uti de 6 återstående lägena sådana intervaller som lilla deciman, stora och lilla tredeciman, hvilkas kombinationstoner verka störande, så att han i detta afseende ställer dessa ackordlägen nästan i samma kategori som mollackorderna.

OETTINGEN följer ungefär samma princip som förut och bestämmer konsonansgraden på det sätt, att han tager summan af de trenne produkter, som uppkomma, då de relativa svängningstalen till treklangens toner med hvarandra multipliceras två och två; ju större denna summa är, eller med andra ord, ju mindre dess reciprokvärde är, desto lägre är konsonansgraden. Söker man denna summa t. ex. för treklängen (2 : 5 : 6), hvilken består af intervallerna 2 : 5, 2 : 6 = 1 : 3 och 5 : 6, så erhålles: $2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 45$; alltså är $\frac{1}{45}$ måttet på konsonansgraden.

Vi kunna likväl ej finna någon tillräcklig grund för OETTINGENS hypotes angående bestämmandet af de konsonerande treklängernas välljud; ty denna summa uttrycker ej annat än summan af svängningstalen till de respektive intervallernas gemensamma öfvertoner. Hade han deremot i stället för summan af dessa produkter tagit summan af reciprokvärdena till produkterna af treklangens svängningstal två och två, så hade han enligt vår åsigt varit mera konsekvent i betraktade af hans hypotes angående intervallernas välljud, som han uttrycker med $\frac{1}{ab}$.

Om vi derföre uttrycka treklangens ($a : b : c$) konsonansgrad med $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$, så erhålla vi följande värden, hvilkas ordningsföljd blir alldeles densamma, som vi förut hafva funnit.

Treklängernas svängningstal.	Beteckning.	Öfvertonernas svängningstal.	Beteckning.	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$
2 : 3 : 5	$c_1 - g_1 - e^0$	6 : 10 : 15	$g^0 - e^1 - h^1$	0,355
2 : 5 : 6	$c_1 - e^0 - g^0$	10 : 12 : 30	$e^1 - g^1 - h^2$	0,217
3 : 4 : 5	$g_1 - c^0 - e^0$	12 : 15 : 20	$g^1 - h^1 - e^2$	0,200
3 : 4 : 10	$g_1 - c^0 - e^1$	12 : 30 : 40	$g^1 - h^2 - e^3$	0,142
3 : 5 : 8	$g_1 - e^0 - c^1$	15 : 24 : 40	$h^1 - g^2 - e^3$	0,153
4 : 5 : 6	$c^0 - e^0 - g^0$	20 : 24 : 30	$e^2 - g^2 - h^2$	0,125
3 : 8 : 10	$g_1 - c^1 - e^1$	24 : 30 : 80	$g^2 - h^2 - e^4$	0,088
4 : 5 : 12	$c^0 - e^0 - g^1$	20 : 48 : 60	$e^2 - g^3 - h^3$	0,088
5 : 6 : 8	$e^0 - g^0 - c^1$	30 : 40 : 48	$h^2 - e^3 - g^3$	0,079
5 : 6 : 16	$e^0 - g^0 - c^2$	30 : 80 : 96	$h^2 - e^4 - g^4$	0,056
5 : 8 : 12	$e^0 - c^1 - g^1$	40 : 60 : 96	$e^3 - h^3 - g^4$	0,052
5 : 12 : 16	$e^0 - g^1 - c^2$	60 : 80 : 192	$h^3 - e^4 - g^5$	0,034

Häraf finna vi, att produkterna af durtreklängernas svängningstal sjelfva äro svängningstal till öfvertoner, hvilka sins emellan bilda e -mollackorder uti flera lägen. Antaga vi alltså, i öfverensstämmelse med OETTINGENS hypotes, att intensiteten hos dessa öfvertoner, betraktade såsom partialtoner uti en tonisk klang, är omvänt proportionel med svängningstalet, så erhålla vi af formeln $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$ värdena på de ofvannämnda mollackordernas intensitet, hvarigenom vi således äfven på detta sätt skulle kunna erhålla ett mått för konsonansgraden.

Gifva vi noga akt på dessa af öfvertoner bildade mollackorder, så finna vi, att dessa ackorder förekomma uti alla de lägen, hvilka e -molltreklängen kan intaga inom två oktavers omfång; men emedan dessa lägen, såsom öfvertoniska betraktade, äro fullkomligt symmetriska med de motsvarande durackordernas lägen, i följe hvaraf mollackordernas svängningstal alltid kunna uttryckas genom reciprokvärdena till durackordernas svängningstal, tagna i omvänd ordning (§. 8), så måste vi alltså enligt vår princip erhålla samma värden på konsonansgraden hos mollackordernas som hos durackordernas lägen.

Betrakta vi derföre molltreklängens beståndsdelar såsom underpartialtoner uti en öfvertonisk klang, så kunna vi lätt uttrycka konsonansgraden på grund af vår förut uppställda hypotes (pag. 39), enligt hvilken intensiteten hos underpartialtonerna uti den öfvertoniska klangen följer alldeles samma lag som hos partialtonerna uti den toniska klangen.

Utgå vi alltså från molltreklängens ursprungliga läge $c^0 - g^0 - h^0$, som kallas grund-

$$\bar{6}^{-1} \quad 5^{-1} \quad \bar{4}^{-1}$$

ackordet, och hvars beståndsdelars svängningstal utgöra reciprokvärdena till durtreklängens $c^0 - e^0 - g^0$ svängningstal, tagna i omvänd ordning (pag. 25), så uppkomma häraf tvenne nya

$$4 \quad \bar{5} \quad 6$$

lägen, allt eftersom qvinten eller tersen utgör ackordets lägsta ton, nemligen qvartsextackordet

$$\frac{h_1}{\bar{8}^{-1}} - \frac{e^0}{\bar{6}^{-1}} - \frac{g^0}{5^{-1}} \quad \text{och} \quad \frac{g_1}{40^{-1}} - \frac{h_1}{\bar{8}^{-1}} - \frac{e^0}{\bar{6}^{-1}},$$

$$\text{hvilka tillika med grundackordet benämnas moll-}$$

$$5^{-1} \quad 4^{-1} \quad 3^{-1}$$

treklängens sammanträngda lägen. På samma sätt som förut, vid behandlingen af durtreklängen, kunna vi äfven här bekomma alla de återstående lägena inom två oktavers omfång.

Antaga vi nu, att a, b, c beteckna durtreklängens svängningstal, så måste svängningstalen till en med denna treklang symmetriskt belägen molltreklang vara c^{-1}, b^{-1}, a^{-1} ; följaktligen hafva molltreklängens beståndsdelar, betraktade såsom underpartialtoner uti en öfvertonisk klang, samma ordningstal, men i omvänd ordning, som tillkomma den uti toniska klangen symmetriskt belägna durtreklängens beståndsdelar. Uttrycket för båda dessa treklängers intensitet blifver således enligt vår princip alldeles detsamma, nemligen $\frac{1}{c^p} + \frac{1}{b^p} + \frac{1}{a^p}$, hvarest $p > 1$.

Vi beräkna nu intensiteten hos molltreklangens (öfvertoniska treklangens) alla lägen inom två oktaver genom att taga $p = \frac{3}{2}$ och $p = 2$. Vidare antaga vi mollackordernas beståndsdelar såsom underpartialtoner uti öfvertoniska klangen på $\underline{h^2}$ såsom öfvertonisk grundton, hvars intensitet vi taga till enhet.

Ordningsföljden bestämma vi liksom förut af de beräknade värdena på intensiteten, då $p = \frac{3}{2}$.

Treklangernas svängningstal.	Beteckning.	$\frac{1}{c^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$	Ordningsföljd.	Enligt HELMHOLTZ.	Enligt OETTINGEN.
$5^{-1} : 3^{-1} : 2^{-1}$	$\underline{g^0} - \underline{e^1} - \underline{h^1}$	0,636	0,401	1	7	1
$6^{-1} : 5^{-1} : 2^{-1}$	$\underline{e^0} - \underline{g^0} - \underline{h^1}$	0,511	0,518	2	9	2
$5^{-1} : 4^{-1} : 3^{-1}$	$\underline{g^0} - \underline{h^0} - \underline{e^1}$	0,407	0,214	3	1	3
$10^{-1} : 4^{-1} : 3^{-1}$	$\underline{g_1} - \underline{h^0} - \underline{e^1}$	0,349	0,184	4	5	4
$8^{-1} : 5^{-1} : 3^{-1}$	$\underline{h_1} - \underline{g^0} - \underline{e^1}$	0,326	0,167	5	12	7
$6^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1}$	$\underline{e^0} - \underline{g^0} - \underline{h^0}$	0,282	0,130	6 (7)	2	5
$10^{-1} : 8^{-1} : 3^{-1}$	$\underline{g_1} - \underline{h_1} - \underline{e^1}$	0,268	0,137	7 (6)	4	6
$12^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1}$	$\underline{e_1} - \underline{g^0} - \underline{h^0}$	0,239	0,109	8	3	9
$8^{-1} : 6^{-1} : 5^{-1}$	$\underline{h_1} - \underline{e^0} - \underline{g^0}$	0,202	0,083	9	6	8
$16^{-1} : 6^{-1} : 5^{-1}$	$\underline{h_2} - \underline{e^0} - \underline{g^0}$	0,173	0,072	10	11	11
$12^{-1} : 8^{-1} : 5^{-1}$	$\underline{e_1} - \underline{h_1} - \underline{g^0}$	0,158	0,063	11	8	10
$16^{-1} : 12^{-1} : 5^{-1}$	$\underline{h_2} - \underline{e_1} - \underline{g^0}$	0,129	0,051	12	10	12

Jemföra vi dessa ordningsföljder med hvarandra, så finna vi, att den af HELMHOLTZ uppställda i betydlig grad afviker från de båda öfriga, men att deremot emellan OETTINGEN och oss äger samma öfverensstämmelse rum, som förut vid bestämmandet af ordningsföljden för durtreklangens lägen. Ty OETTINGEN har på durtreklangens alla lägen tillämpat HAUPTMANN'S princip, enligt hvilken molltreklangen $\underline{e^0} - \underline{g^0} - \underline{h^0}$ är en omvändning af durtreklangen $\underline{c^0} - \underline{e^0} - \underline{g^0}$,
 $\underline{6^{-1}} \quad \underline{5^{-1}} \quad \underline{4^{-1}} \qquad \qquad \qquad \underline{4} \quad \underline{5} \quad \underline{6}$

och derigenom erhållit de symmetriskt belägna mollackorderna, hvilkas beståndsdelar sins emellan bilda samma intervaller, som förekomma uti de motsvarande durackorderna. Denna symmetri hafva vi också funnit genom att betrakta mollackordernas beståndsdelar såsom underpartialtoner uti en öfvertonisk klang, hvarigenom underpartialtonernas ordningstal, tagna i omvänd ordning, blifva lika med ordningstalen till de motsvarande durackordernas beståndsdelar, betraktade såsom

partialtoner uti en tonisk klang, och i följe deraf hafva vi enligt vår princip erhållit både samma ordningsföljd och samma värden på intensiten hos mollackorderna som hos durackorderna.

HELMHOLTZ erhåller deremot en helt annan ordningsföljd för mollackorderna än för durackorderna, emedan kombinationstonerna utöfva ett vida större inflytande på de förra än på de sednare. Ty emedan molltreklangens ters bildar med grundtonen fyra olika intervaller, nemligen lilla tersen, stora sexten, lilla deciman och stora tredeciman, hvilka alla förekomma uti molltreklangens lägen och hvilka hvar för sig frambringa en uti mollackordet störande kombinationston, så finnes icke ett enda bland alla dessa mollackorder, som icke innehåller åtminstone *en* störande kombinationston.

Enligt HELMHOLTZ förekommer uti de tre första (hos oss 3, 6, 8) lägena endast *en* så beskaffad kombinationston, och derföre föredrager han deras välljud framför de öfriga ackordernas. Deremot innehålla ackorderna 4—10 *två* störande kombinationstoner, af hvilka den ena alltid frambringas af något bland de ofvannämnda intervallerna, den andra af undeciman ($\underline{h_1} - \underline{e^1}$) uti 4:de (hos oss 7:de) och af stora deciman, lilla sexten och lilla tredeciman uti de 6 återstående lägena. De två sista ackorderna, nemligen 11:te och 12:te (hos oss 10:de och 5:te) anser han vara de minst välljudande, emedan desamma innehålla ända till *tre* störande kombinationstoner.

HELMHOLTZ *) yttrar särskilt med afseende på tvenne ackordlägen följande: "Der Einfluss der Combinationstöne giebt sich auch bei der Vergleichung der verschiedenen Lagen zu erkennen. So klingt die Lage 3 mit einer kleinen Decime und grossen Terz entschieden besser als die Lage 7 mit grosser Decime und grosser Sexte, obgleich die beiden letzteren Interwalle einzeln genommen besser klingen als die beiden ersten. Der schlechtere Klang des Accordes 7 wird also allein durch den zweiten unpassenden Combinationston verursacht."

Häraf inse vi tydligen det störande inflytande, som vid dessa ackordbildningar uppkommer af de särskilta intervallernas kombinationstoner, så att till och med de mera konsonerande intervallerna i förening kunna åstadkomma en sämre klang än de mindre konsonerande.

Betrakta vi deremot molltreklangens såsom en öfvertonisk treklang, så måste läget 7 (enligt HELMHOLTZ) ovilkorligen intaga en vida högre rang. Enligt OETTINGENS och vår beräkning intager också just detta ackord främsta rummet, emedan detsamma, såsom öfvertoniskt betraktadt, är det först framträdande läge (inom två oktavers omfång), som bildas af underpartialtonerna uti den öfvertoniska klangen.

Hvad deremot molltreklangens sammanträngda lägen beträffar, så öfverensstämman vi alla tre derutinnan, att sextackordet ($5^{-1}:4^{-1}:3^{-1}$) klingar bättre än grundackordet ($6^{-1}:5^{-1}:4^{-1}$),

*) pag. 346.

detta sednare åter bättre än kvartsextackordet ($8^{-1}:6^{-1}:5^{-1}$). Ty enligt HELMHOLTZ intaga dessa ackorder lägena 1, 2, 6, enligt OETTINGEN 3, 5, 8, och hos oss 3, 6, 9.

Slutligen vilja vi fästa uppmärksamheten derpå, att uti de fyra sista ackordlägena 9—12, hvilka enligt vår princip äro de minst konsonerande, utgör molltreklangens *ters* g^0 ackordets *högsta* ton.

Af de konsonerande treklangerna kunna vi lätt bilda de *konsonerande fyrklanger*na, hvilkas konsonansgrad vi äfvenledes enligt vår princip skola bestämma.

Dessa fyrklanger uppkomma nemligen på det sätt, att en oktavfördubbling af hvilken som helst af treklangernas beståndsdelar inträder, hvarigenom de fyrstämmiga ackorderna endast kunna innehålla konsonerande intervaller, och följaktligen måste de äfven sjelfva vara konsone-
rande. Men emedan konsonerande fyrklanger kunna uppkomma af såväl dur- som molltreklan-
ger, så måste de vara antingen toniskt eller öfvertoniskt konsonerande. I förra fallet betrakta vi deras beståndsdelar såsom *partialtoner* uti en *tonisk klang*, i det sednare deremot såsom *underpartialtoner* uti en *öfvertonisk klang*.

Enligt formeln för den *normala klangfärgen* kunna vi nu lätt beräkna dessa fyrklangers intensitet.

Ty om a, b, c, d (hela tal och $a < b < c < d$) beteckna de särskilda tonernas svängningstal (= partialtonernas ordningstal), så blir, om toniska grundtonens intensitet betecknas med 1, allmänna uttrycket för den *toniskt konsonerande fyrklangens* intensitet eller konsonansgrad: $\frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p} + \frac{1}{c^p} + \frac{1}{d^p}$, hvarest $p > 1$.

För att nu äfven kunna uttrycka intensiteten hos de *öfvertoniskt konsonerande fyrklanger*na, så böra vi endast observera, att alla dessa fyrklangers lägen uti den öfvertoniska klangen äro fullkomligt symmetriska med de motsvarande toniskt konsonerande fyrklangernas lägen uti den toniska klangen; följaktligen kunna de förras svängningstal uttryckas genom reciprok-
värdena till de sednares svängningstal, tagna i omvänd ordning.

Äro alltså $d^{-1}, c^{-1}, b^{-1}, a^{-1}$ svängningstalen till de särskilda tonerna uti den öfvertoniska fyrklangen, så blir, om öfvertoniska grundtonens intensitet betecknas med 1, allmänna uttrycket för denna fyrklangs intensitet alldeles detsamma, som vi ofvanföre hafva funnit för den toniska fyrklangen.

Antaga vi således, att c_2 är den toniska grundtonen, hvars intensitet är 1, att $p = \frac{3}{2}$ och $p = 2$, så erhålla vi följande värden på intensiteten hos de *toniskt konsonerande fyrklanger*nas 36 lägen inom två oktavers omfång.

Fyrklangernas svängningstal.	Beteckning.	$\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{c^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{d^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$	Ordnings- följd.	Enligt HELMHOLTZ.	Enligt OETTINGEN.
2: 3: 4: 5	$c_1 - g_1 - e^0 - e^0$	0,761	0,464	1	1	1
2: 3: 5: 6	$c_1 - g_1 - e^0 - g^0$	0,704	0,429	2	2	3
2: 3: 5: 8	$c_1 - g_1 - e^0 - c^1$	0,680	0,417	3	4	6
2: 4: 5: 6	$c_1 - c^0 - e^0 - g^0$	0,636	0,380	4	8	2
2: 5: 6: 8	$c_1 - e^0 - g^0 - c^1$	0,555	0,333	5	9	7
3: 4: 5: 6	$g_1 - c^0 - e^0 - g^0$	0,475	0,241	6	5	8
3: 4: 5: 8	$g_1 - c^0 - e^0 - c^1$	0,451	0,229	7	6	10
3: 4: 5: 10	$g_1 - c^0 - e^0 - e^1$	0,439	0,224	8	—	15
3: 4: 5: 12	$g_1 - c^0 - e^0 - g^1$	0,431	0,221	9	—	18
3: 4: 6: 10	$g_1 - c^0 - g^0 - e^1$	0,417	0,211	10	—	4
3: 5: 6: 8	$g_1 - e^0 - g^0 - c^1$	0,394	0,195	11 (12)	11	17
3: 4: 8: 10	$g_1 - c^0 - c^1 - e^1$	0,393	0,199	12 (11)	—	5
3: 4: 10: 12	$g_1 - c^0 - e^1 - g^1$	0,373	0,191	13	—	12
3: 5: 8: 10	$g_1 - e^0 - c^1 - e^1$	0,358	0,177	14	—	24
3: 5: 8: 12	$g_1 - e^0 - c^1 - g^1$	0,350	0,174	15	—	26
3: 6: 8: 10	$g_1 - g^0 - c^1 - e^1$	0,336	0,165	16	—	11
4: 5: 6: 8	$c^0 - e^0 - g^0 - c^1$	0,327	0,146	17	10	9
4: 5: 6: 10	$c^0 - e^0 - g^0 - e^1$	0,314	0,140	18 (19)	3	14
4: 5: 6: 12	$c^0 - e^0 - g^0 - g^1$	0,307	0,137	19 (20)	—	16
4: 5: 6: 16	$c^0 - e^0 - g^0 - c^2$	0,298	0,134	20 (21)	—	20
3: 8: 10: 12	$g_1 - c^1 - e^1 - g^1$	0,292	0,144	21 (18)	—	19
4: 5: 8: 12	$c^0 - e^0 - e^1 - g^1$	0,283	0,125	22	—	13
4: 5: 10: 12	$c^0 - e^0 - e^1 - g^1$	0,270	0,119	23	—	23
4: 5: 12: 16	$c^0 - e^0 - g^1 - c^2$	0,254	0,113	24	—	25
5: 6: 8: 10	$e^0 - g^0 - c^1 - e^1$	0,233	0,093	25	7	22
5: 6: 8: 12	$e^0 - g^0 - c^1 - g^1$	0,226	0,090	26	—	21
5: 6: 8: 16	$e^0 - g^0 - c^1 - c^2$	0,217	0,087	27	—	27
5: 6: 8: 20	$e^0 - g^0 - c^1 - e^2$	0,213	0,086	28	—	30
5: 6: 10: 16	$e^0 - g^0 - e^1 - c^2$	0,205	0,082	29	—	33
5: 6: 12: 16	$e^0 - g^0 - g^1 - c^2$	0,197	0,079	30	—	31
5: 8: 10: 12	$e^0 - c^1 - e^1 - g^1$	0,189	0,073	31 (32)	—	29
5: 6: 16: 20	$e^0 - g^0 - c^2 - e^2$	0,184	0,074	32 (31)	—	35
5: 8: 12: 16	$e^0 - c^1 - g^1 - c^2$	0,173	0,066	33	—	28
5: 8: 12: 20	$e^0 - c^1 - g^1 - e^2$	0,169	0,065	34	—	32
5: 10: 12: 16	$e^0 - e^1 - g^1 - c^2$	0,161	0,061	35	—	34
5: 12: 16: 20	$e^0 - g^1 - c^2 - e^2$	0,140	0,053	36	—	36

Af dessa trenne ordningsföljder finna vi, att HELMHOLTZ afviker ungefär lika mycket från OETTINGEN som från oss. Ty om vi endast fästa oss vid de af HELMHOLTZ utvalda ackorderna, så uppkomma följande ordningsserier:

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11,$$

$$\text{Enligt HELMHOLTZ: } 1 - 2 - 4 - 8 - 9 - 5 - 6 - 11 - 10 - 3 - 7,$$

$$\text{,, OETTINGEN: } 1 - 3 - 4 - 2 - 5 - 6 - 8 - 10 - 7 - 9 - 11,$$

hvaraf äfven synes, att afvikelserna mellan oss och OETTINGEN äro utan vidare betydighet. Hvad deremot de återstående ackorderna beträffar, så skilja vi oss på flera ställen betydligt från OETTINGEN; dock äro afvikelserna för öfrigt, isynnerhet emellan de sista ackorderna, obetydliga.

I afseende på dessa fyrstämmiga durackorders (toniskt konsonerande fyrklangers) sammanträngda lägen, så öfverensstämma vi med OETTINGEN deruti, att (liksom hos durtreklangens) *quartsextackordet* (3 : 4 : 5 : 6) är bättre än *grundackordet* (4 : 5 : 6 : 8), detta sednare åter bättre än *sextackordet* (5 : 6 : 8 : 10); ty enligt OETTINGEN intaga dessa ackorder lägena 8, 9, 22, hos oss 6, 17, 25. Enligt HELMHOLTZ är äfven *quartsextackordet*, hvilket förekommer i 5:te läget, det bästa; men deremot föredrager han *sextackordet* (7:de läget) framför *grundackordet* (10:de läget).

Vidare framgår af vår beräkning samma resultat, som vi förut hafva bemärkt hos durtreklangerna, nemligen att endast uti de minst konsonerande fyrklangererna (25 — 36) utgör tersen (e^0) ackordets lägsta ton. Enligt vår princip äro alltså alla de tre- eller fyrstämmiga durackorder minst konsonerande, uti hvilka tersen ligger i basen.

Uti de af HELMHOLTZ utvalda fyrstämmiga durackorderna innehåles icke någon enda störande kombinationston; deremot uppstå sådana kombinationstoner (likväl högst två) uti alla de återstående ackorderna, emedan uti dessa ackorder förekomma *lilla deciman* (5 : 12), *stora* (3 : 10) och *lilla tredeciman* (5 : 16), hvilka intervaller icke kunna existera uti något konsonerande ackord, utan att deras kombinationstoner verka störande.

HELMHOLTZ undviker derföre dessa intervaller genom att noga gifva akt på tersens läge till grundtonen och qvinten. Ligger grundtonen öfver tersen, så får intervallet ej öfverstiga *lilla sexten*, ty i annat fall uppkommer genom oktavförflyttning (af grundtonen uppåt) *lilla tredeciman*; deremot kan grundtonen ligga huru djupt som helst. Ligger qvinten öfver eller under tersen, så får intervallet i förra fallet ej öfverstiga *lilla tersen*, ty genom oktavförflyttning (af qvinten uppåt) inträder *lilla deciman*, och i sednare fallet ej öfverstiga *stora sexten*, emedan genom oktavförflyttning (af qvinten nedåt) uppkommer *stora tredeciman*.

Vilja vi bestämma konsonansgraden för de fyrstämmiga mollackorderna (öfvertoniskt konsonerande fyrklanger), så betrakta vi liksom förut (hos molltreklangerna) deras beståndsdelar

såsom underpartialtoner uti en öfvertonisk klang. Äfven här uppkomma 36 olika lägen inom två oktavers omfång, hvilka alla äro symmetriska med de motsvarande fyrstämmiga durackorderna, och följaktligen erhålla vi enligt vår princip samma värden på intensiteten hos de förra som hos de sednare.

Emedan HELMHOLTZ särskilt utvalt efterföljande 9 lägen, uti hvilka icke flera än två störande kombinationstoner förekomma, så vilja vi för jemförelse skull endast taga dessa lägen i närmare betraktande.

Vi antaga såsom förut (vid beräkningen af molltreklangernas intensitet), att h^2 är den öfvertoniska klangens grundton, hvars intensitet vi beteckna med talet 1.

Fyrklangernas svängningstal.	Beteckning.	$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$	Ordnings- följd.	Enligt HELMHOLTZ.	Enligt OETTINGEN.
$5^{-1} : 4^{-1} : 3^{-1} : 2^{-1}$	$g^0 - \underline{h^0} - \underline{e^1} - \underline{h^1}$	0,764	0,464	1	3	1
$6^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1} : 2^{-1}$	$e^0 - g^0 - \underline{h^0} - \underline{h^1}$	0,636	0,380	2	7	2
$6^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1} : 3^{-1}$	$e^0 - g^0 - \underline{h^0} - \underline{e^1}$	0,475	0,244	3	1	3
$12^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1} : 3^{-1}$	$e_1 - g^0 - \underline{h^0} - \underline{e^1}$	0,434	0,224	4	2	8
$8^{-1} : 6^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1}$	$h_1 - e^0 - g^0 - \underline{h^0}$	0,327	0,146	5	5	4
$10^{-1} : 6^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1}$	$g_1 - e^0 - g^0 - \underline{h^0}$	0,314	0,140	6	6	6
$12^{-1} : 6^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1}$	$e_1 - e^0 - g^0 - \underline{h^0}$	0,307	0,137	7	4	7
$12^{-1} : 8^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1}$	$e_1 - h_1 - g^0 - \underline{h^0}$	0,283	0,125	8	8	5
$10^{-1} : 8^{-1} : 6^{-1} : 5^{-1}$	$g_1 - h_1 - e^0 - g^0$	0,233	0,093	9	9	9

Af dessa ordningsföljder finna vi, att HELMHOLTZ afviker mindre från oss än från OETTINGEN, men att vi alla tre deremot, med afseende på de fyrstämmiga mollackordernas sammanträngda lägen, öfverensstämma deruti, att *grundackordet* ($6^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1} : 3^{-1}$) är bättre än *kvartsextackordet* ($8^{-1} : 6^{-1} : 5^{-1} : 4^{-1}$), detta sednare åter bättre än *sextackordet* ($10^{-1} : 8^{-1} : 6^{-1} : 5^{-1}$). Enligt HELMHOLTZ intaga dessa ackorder lägena 1, 5, 9, enligt OETTINGEN 3, 4, 9, och hos oss 3, 5, 9.

Äfven här inträffar, liksom förhållandet är med de konsonerande treklangerna, att kombinationstonerna verka mera störande uti mollackorderna än uti durackorderna, så att det blott gifves ett enda fyrstämmigt mollackord, nemligen grundackordet (1:sta läget enligt HELMHOLTZ), som icke innehåller mera än *en* störande kombinationston; följaktligen måste i detta afseende mollackorderna vara durackorderna betydligt underlägsna i välljud. Detta kan man för öfrigt lätt pröfva på sådana instrumenter som t. ex. sirenen och physharmonikan, hilkas kombinationstoner ganska tydligt kunna förnimmas.

Lägger man alltså kombinationstonerna till grund för bestämmandet af de mest konsonerande fyrstämmiga dur- och mollackorderna, så äro de af HELMHOLTZ utvalda ackordlägena otvifvelaktigt de bästa. Men emedan kombinationstonernas mer eller mindre störande inverkan är beroende af vissa, af oss förut omnämnda, omständigheter, så kunna vi för vår del ej i allmänhet tilldela desamma någon synnerlig betydelse, isynnerhet som öfvertoneernas sväfningar uti de klangrikare instrumenterna utöfva ett vida större inflytande på de konsonerande ackordernas välljud. Vi hafva också just derföre visat, att den af HELMHOLTZ bestämda konsonansgraden (på grund af öfvertoneernas inflytande) hos de konsonerande intervallerna, af hvilka de konsonerande tre- och fyrstämmiga ackorderna äro sammansatta, i det hufvudsakliga fullkomligt öfverensstämmer med de resultater, till hvilka vi enligt principen för den normala klangfärgen hafva kommit.

Slutligen vilja vi omnämna ett fyrstämmigt ackord, som, fastän detsamma uti harmoniläran hänföres till de så kallade *altererade* eller *kromatiskt förändrade ackorderna*, likväl kan betraktas såsom ett konsonerande ackord, emedan dess högsta ton ganska nära sammanfaller med 7:de partialtonen uti den toniska klangen.

Detta ackord är nemligen det så kallade *öfverstigande quintsextackordet*: $c^0 - \underline{e^0} - g^0 - \underline{\sharp a^0}$,
 $\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 6 & \underline{225} \\ & & & 32 \end{array}$

uti hvilket *öfverstigande sexten* $\left(4 : \frac{225}{32}\right)$ ligger ganska nära den s. k. *naturliga septiman* $(4 : 7)$,

emedan den förra öfverskjuter den sednare endast med ett litet intervall eller s. k. komma $(224 : 225)$.

Bestämman vi enligt vår princip konsonansgraden för detta ackord, så erhålla vi följande värden på intensiteten:

$$\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{6^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(\frac{225}{32}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0,336; p = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{\left(\frac{225}{32}\right)^2} = 0,454; p = 2.$$

Anm. Samma värden, uttryckta i 3 decimaler, finna vi äfven genom att insätta talet 7 i stället för $\frac{225}{32}$.

Betrakta vi nu den af oss förut bestämda ordningsföljden för de fyrstämmiga durtreklangerna, så skulle följaktligen *öfverstigande qvintsextackordet* $(4 : 5 : 6 : \frac{225}{32})$ intaga 17:de

läget och således vara mera konsonerande än *grundackordet* $(4 : 5 : 6 : 8)$.

Oaktadt 7:de partialtonen är utesluten från vårt nuvarande tonsystem, som endast grundar sig på primtal 2, 3 och 5, så klingar dock denna partialton understundom ganska starkt och åstadkommer ett högst egendomligt och angenämt intryck.

BELLERMANN *) omnämner, att, sedan KIRNBERGER först fäste uppmärksamheten på denna ton, som han betecknade med bokstafven *i*, åtskilliga theoretici under förra århundradet hafva försökt att införa intervallet $(4 : 7)$ uti den praktiska musiken. Bland andra har KARL FASCH, den berömde grundläggaren af sångakademien i Berlin, begagnat sig af KIRNBERGERS upptäckt och försökt att uti sin 119:de psalm införa denna ton, som vi beteckna med $\sharp a^0$. Han tycks hafva betraktat intervallet $(4 : 7)$ såsom en slags septima, oaktadt det snarare enligt vår åsigt bör uppfattas såsom en öfverstigande sext, emedan tonen *i* ligger till och med lägre än tonen $\sharp a^0$.

FASCH upplöser ackordet $c^0 - \underline{e^0} - g^0 - i^0$ på följande sätt:

$$\begin{aligned} c^0 - \underline{e^0} - g^0 - i^0 \\ g_1 - \underline{d^0} - f^0 - \underline{h^0} \\ c_1 - c^0 - \underline{e^0} - c^1. \end{aligned}$$

Betraktas deremot ackordet såsom ett *öfverstigande qvintsextackord*, så är den vanliga upplösningen:

$$\begin{aligned} c^0 - \underline{e^0} - g^0 - i^0 (\sharp a^0) \\ h_1 - \underline{e^0} - g^0 - \underline{h^0} \\ h_1 - \sharp d^0 - \sharp f^0 - \underline{h^0} \\ e_1 - \underline{e^0} - g^0 - \underline{h^0}, \end{aligned}$$

hvarst $i^0 (\sharp a^0)$ är inledningstonen (uppåt) till $\underline{h^0}$, då deremot c^0 är inledningstonen (nedåt) till $\underline{h_1}$.

BELLERMANN yttrar med afseende på införandet af 7:de partialtonen följande **): "Diese Versuche stehen natürlich ganz vereinzelt da; eine richtige Erkenntniss der diatonischen Tonleiter und ihrer Intervalle hätte Beide (sowohl den KIRNBERGER als den FASCH) leicht davon überzeugen können, dass der Ton *i* ausser allem Zusammenhange mit den übrigen Tönen der

*) Die Grösse der musikalischen Intervalle als Grundlage der Harmonie. Berlin, 1873.

**) pag. 23.

Tonleiter steht, und folglich seine Anwendung in der praktischen Musik unmöglich ist. Denn aus dem blossen Wohlklang kann man die Zulässigkeit eines Intervalles nicht beweisen."

Det oaktadt hafva vi likväl visat, att tonen $\sharp a^0$, emedan densamma ligger mycket nära tonen $\underline{\underline{a^0}}$, betraktas såsom en öfverstigande sext, hvarigenom *öfverstigande quintsextackordet* uppkommer, som är ett ganska viktigt modulationsmedel.

§. 12.

I det föregående hafva vi tydligen visat, huru man enligt principen för den normala klangfärgen kan bestämma konsonansgraden såväl för de konsonerande intervallerna, som ock för de konsonerande tre- och fyrstämmiga ackorderna.

Vi öfvergå nu till en särskilt undersökning angående *förvandtskapen emellan de konsonerande* (dur- och moll-) *treklangerna*.

Till en början utgå vi från en viss så kallad tonart, t. ex. *c*-durtonarten, som vi benämna det *toniska c-systemet* och som representeras af följande diatoniska tonskala (se pag. 56):

$$\begin{array}{cccccccc} c^0 & - & \underline{d^0} & - & \underline{e^0} & - & f^0 & - & g^0 & - & \underline{a^0} & - & \underline{h^0} & - & c^1 \\ 24 & 27 & 30 & 32 & 36 & 40 & 45 & 48. \end{array}$$

Denna tonskala hafva vi förut gifvit benämningen *tonisk skala*, emedan alla dess toner utgöra *partialtoner* uti en *tonisk klang*, hvars toniska grundton är f_5 .

Om vi nu med en oktav nedflytta tonerna f^0 , $\underline{a^0}$, och på samma gång uppflytta (likaledes med en oktav) tonen $\underline{d^0}$, så uppkommer följande tonserie:

$$\begin{array}{cccccccc} f_1 & - & \underline{a_1} & - & c^0 & - & \underline{e^0} & - & g^0 & - & \underline{h^0} & - & d^1 \\ 16 & 20 & 24 & 30 & 36 & 45 & 54. \end{array}$$

Af denna tonserie finna vi, att intervallerna emellan de på hvarandra följande 7 hufvudtonerna uti det toniska *c*-systemet utgöras af omvexlande stora och små terser, hvarigenom vi af tre på hvarandra följande toner kunna bilda antingen en tonisk (dur-) treklang eller en öfvertonisk (moll-) treklang.

Häraf uppkomma således följande treklanger, hvilka vi uppställa uti den ordning, som densamma intaga uti den toniska klangen på f_5 , nemligen:

$$f_1 - \underline{a_1} - c^0, \underline{a_1} - c^0 - \underline{e^0}, c^0 - \underline{e^0} - g^0, \underline{e^0} - g^0 - \underline{h^0}, g^0 - \underline{h^0} - d^1.$$

Det toniska *c*-systemet innefattar alltså 5 konsonerande treklanger, af hvilka 3 äro toniska och 2 öfvertoniska.

Beteckna vi nu för korthet skull t. ex. toniska treklangen $c^0 - \underline{e^0} - g^0$ med $c^0 (+)$ och öfvertoniska treklangen $\underline{e^0} - g^0 - \underline{h^0}$ med $\underline{h^0} (-)$, så hafva vi följande sammanställning:

Toniska treklanger.

$$\begin{aligned} f_1 - \underline{a_1} - \underline{c^0} &= f_1 (+) \\ \underline{c^0} - \underline{e^0} - \underline{g^0} &= \underline{c^0} (+) \\ \underline{g^0} - \underline{h^0} - \underline{a^1} &= \underline{g^0} (+). \end{aligned}$$

Öfvertoniska treklanger.

$$\begin{aligned} \underline{a_1} - \underline{c^0} - \underline{e^0} &= \underline{e^0} (-) \\ \underline{e^0} - \underline{g^0} - \underline{h^0} &= \underline{h^0} (-) \end{aligned}$$

Emedan det toniska systemet karakteriseras genom dess trenne toniska treklanger, hvilkas beståndsdelar dessutom utgöras af den toniska skalans alla 7 toner, så har man gifvit dem benämningen *hufvudtreklanger*. Vidare kallar man treklangen $\underline{c^0}(+)$ på skalans grundton $\underline{c^0}$ *tonikans treklang*, $\underline{g^0}(+)$ på qvinten $\underline{g^0}$ *dominant-treklang* och $\underline{f_1}(+)$ på underqvinten $\underline{f_1}$ *underdominant-treklang*.

Föreنا vi det toniska *c*-systemets 5 konsonerande treklanger med hvarandra två och två, så uppkomma följande 10 kombinationer, hvilka vi fördela uti tre grupper.

Två toniska treklanger.	Två öfvertoniska treklanger.	En tonisk och en öfver-tonisk treklang.
$\underline{f_1}(+) + \underline{c^0}(+)$	$\underline{e^0}(-) + \underline{h^0}(-)$	$\underline{f_1}(+) + \underline{e^0}(-)$
$\underline{c^0}(+) + \underline{g^0}(+)$		$\underline{c^0}(+) + \underline{h^0}(-)$
$\underline{f_1}(+) + \underline{g^0}(+)$		$\underline{e^0}(-) + \underline{c^0}(+)$
		$\underline{h^0}(-) + \underline{g^0}(+)$
		$\underline{f_1}(+) + \underline{h^0}(-)$
		$\underline{e^0}(-) + \underline{g^0}(+)$

För att nu kunna uttrycka förvandtskapen emellan tvenne treklanger, så betrakta vi deras beståndsdelar antingen såsom partialtoner uti en tonisk klang eller såsom underpartialtoner uti en öfvertonisk klang. Vidare beräkna vi, enligt formeln för den normala klangfärgen, summan af dessa partial- eller underpartialtoners intensitet, som således uttrycker måttet på förvandtskapen. Ju större denna summa är, desto starkare är förvandtskapen emellan treklangerne.

1) *Två toniska treklanger.*

Emedan dessa treklanger ligga närmare den gemensamma grundtonen än den gemensamma öfvertonen, så betrakta vi deras beståndsdelar såsom partialtoner uti toniska klangen på denna grundton, hvars intensitet vi taga till enhet.

Gemensamma grundtoner.	Två toniska treklanger.					
f_4	$f_1 - a_1 - c^0$ och $c^0 - e^0 - g^0$					
1	8	$\overline{10}$	12	12	$\overline{15}$	18
c_3	$c^0 - e^0 - g^0$ „ $g^0 - h^0 - d^1$					
1	8	$\overline{10}$	12	12	$\overline{15}$	18
f_5	$f_1 - a_1 - c^0$ „ $g^0 - h^0 - d^1$					
1	16	$\overline{20}$	24	36	$\overline{45}$	54

Häraf erhålla vi följande värden på intensiteten:

$$\left. \begin{matrix} f_1 (+) + c^0 (+) \\ c^0 (+) + g^0 (+) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{8^p} + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{15^p} + \frac{1}{18^p} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right)$$

$$f_1 (+) + g^0 (+) = \frac{1}{16^p} + \frac{1}{20^p} + \frac{1}{24^p} + \frac{1}{36^p} + \frac{1}{45^p} + \frac{1}{54^p} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} \right).$$

Emedan intensiteten är densamma hos de tvenne första kombinationerna, så måste följaktligen tonikans treklang $c^0 (+)$ hafva samma förvandtskap till dominant-treklängen $g^0 (+)$ som till underdominant-treklängen $f_1 (+)$.

2) Två öfvertoniska treklanger.

I detta fall ligga treklängerna närmare den gemensamma öfvertonen än den gemensamma grundtonen, hvarföre vi alltså betrakta treklängernas beståndsdelar såsom underpartialtoner uti öfvertoniska klangen på denna öfverton, hvars intensitet vi taga till enhet.

Två öfvertoniska treklanger.	Gemensam öfverton.
$a_1 - c^0 - e^0$ och $e^0 - g^0 - h^0$	h^3
$\overline{18^{-1}}$ $\overline{15^{-1}}$ $\overline{12^{-1}}$ $\overline{12^{-1}}$ $\overline{10^{-1}}$ $\overline{8^{-1}}$	$\overline{1}$

Alltså är summan af treklängernas intensitet:

$$\overline{e^0} (-) + \overline{h^0} (-) = \frac{1}{8^p} + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{15^p} + \frac{1}{18^p} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right).$$

Dessa treklanger hafva således, såsom öfvertoniska betraktade, samma förvandtskap sins emellan, som $c^0 (+)$ har till $g^0 (+)$ och $f_1 (+)$.

5) *En tonisk och en öfvertonisk treklang.*

Emedan dessa treklanger äro lika långt aflägsna från den gemensamma grundtonen som från den gemensamma öfvertonen, så kunna vi betrakta deras beståndsdelar antingen såsom partialtoner uti toniska klangen på deras grundton eller såsom underpartialtoner uti öfvertoniska klangen på deras öfverton.

Gemensamma grundtoner.	En tonisk och en öfvertonisk treklang.						Gemensamma öfvertoner.
f_4 1 120^{-1}	f_1 8 15^{-1}	a_1 10 12^{-1}	c^0 12 10^{-1}	och a_1 10 12^{-1}	c^0 12 10^{-1}	e^0 15 8^{-1}	e^3 120 1
c_3 1 120^{-1}	c^0 8 15^{-1}	e^0 10 12^{-1}	g^0 12 10^{-1}	„ e^0 10 12^{-1}	g^0 12 10^{-1}	h^0 15 8^{-1}	h^3 120 1
f_4 1 180^{-1}	a_1 10 18^{-1}	c^0 12 15^{-1}	e^0 15 12^{-1}	„ c^0 12 15^{-1}	e^0 15 12^{-1}	g^0 18 10^{-1}	h^3 180 1
c_3 1 180^{-1}	e^0 10 18^{-1}	g^0 12 15^{-1}	h^0 15 12^{-1}	„ g^0 12 15^{-1}	h^0 15 12^{-1}	d^1 18 10^{-1}	$\sharp f^4$ 180 1
f_5 1 720^{-1}	f_1 16 45^{-1}	a_1 20 36^{-1}	c^0 24 30^{-1}	„ e^0 30 24^{-1}	g^0 36 20^{-1}	h^0 45 16^{-1}	h^4 720 1
f_5 1 1080^{-1}	a_1 20 54^{-1}	c^0 24 45^{-1}	e^0 30 36^{-1}	„ g^0 36 30^{-1}	h^0 45 24^{-1}	d^1 54 20^{-1}	$\sharp f^5$ 1080 1

Häraf erhålla vi följande värden på intensiteten:

$$\left. \begin{matrix} f_1(+) + e^0(-) \\ c^0(+) + \bar{h}^0(-) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{8^p} + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{15^p} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p} \right)$$

$$\left. \begin{matrix} e^0(-) + c^0(+) \\ \bar{h}^0(-) + g^0(+) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{10^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{15^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{15^p} + \frac{1}{18^p} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) - \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p} \right)$$

$$f_1(+) + \bar{h}^0(-) = \frac{1}{16^p} + \frac{1}{20^p} + \frac{1}{24^p} + \frac{1}{30^p} + \frac{1}{36^p} + \frac{1}{45^p} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} \right) + \frac{1}{6^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p} \right)$$

$$\bar{e}^0(-) + g^0(+) = \frac{1}{20^p} + \frac{1}{24^p} + \frac{1}{30^p} + \frac{1}{36^p} + \frac{1}{45^p} + \frac{1}{54^p} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} \right) - \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p} \right).$$

Sammanställa vi nu det toniska *c*-systemets konsonerande treklanger två och två, ordnade efter värdena på intensiteten, så erhålla vi följande ordningsföljd för förvandtskapen:

$$\left. \begin{aligned} c^0(+) + \underline{h}^0(-) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p}\right) \\ f_1(+) + \underline{e}^0(-) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p}\right) \\ c^0(+) + g^0(+) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) \\ f_1(+) + c^0(+) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) \\ \underline{e}^0(-) + \underline{h}^0(-) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) - \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p}\right) \\ \underline{e}^0(-) + c^0(+) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) - \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p}\right) \\ \underline{h}^0(-) + g^0(+) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) - \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p}\right) \\ f_1(+) + \underline{h}^0(-) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \frac{1}{6^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p}\right) \\ f_1(+) + g^0(+) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) \\ \underline{e}^0(-) + g^0(+) &= \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p}\right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) - \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p}\right) \end{aligned} \right\}$$

Utsträcka vi gränserna för det toniska *c*-systemets ters-serie:

$$\underline{f_1 - a_1 - c^0 - e^0 - g^0 - h^0 - d^1} = f_1(+) - \underline{e^0(-)} - c^0(+) - \underline{h^0(-)} - g^0(+),$$

nedåt med en *liten ters* och *uppåt* med en *stor ters*, så erhålla vi derigenom en följd af omvexlande toniska och öfvertoniska treklanger, som innefattar tre särskilda, med hvarandra nära beslägtade, systemer (tonarter), nemligen toniska *c*-systemet (*c*-dur) och de å ömse sidor om detta belägna öfvertoniska *e*- och *h*-systemerna (*a*-moll och *e*-moll). Här af följande tonserie:

$$\underline{d_1 - f_1 - a_1 - c^0 - e^0 - g^0 - h^0 - d^1 - \sharp f^1} = \overbrace{a_1(-) - f_1(+) - e^0(-) - c^0(+) - h^0(-) - g^0(+)}^{\text{ton. } c\text{-syst.}} - \overbrace{\sharp f^1(-)}^{\text{öfverton. } e\text{-syst.}} - \overbrace{\sharp f^1(-)}^{\text{öfverton. } h\text{-syst.}}$$

Likasom grundtreklängen $c^0(+)$ uti toniska *c*-systemet intager centrum emellan gränstreklangerna $f_1(+)$ och $g^0(+)$, så intaga äfven grundtreklangerne $e^0(-)$ och $h^0(-)$ uti öfvertoniska *e*- och *h*-systemerna centrum emellan de respektive gränstreklangerne $a_1(-)$ och $h^0(-)$, $e^0(-)$ och $\sharp f^1(-)$. De tvenne sednare systemerna kunna derföre också sägas hafva hvar sin dominant- och underdominant-treklång, hvilka hvar för sig hafva samma förvandtskap till den mellanliggande öfvertoniska grundtreklängen, som det toniska systemets dominant- och underdominant-treklanger hafva till sin toniska grundtreklång. I toniska systemet ligger dominant-treklängen *öfver* och underdominant-treklängen *under* grundtreklängen, uti öfvertoniska

systemet är deremot förhållandet omvändt, så att t. ex. uti öfvertoniska $\underline{e}$ -systemet är $\underline{a}_1 (-)$ dominant- och $\underline{h}^0 (-)$ underdominant-trekläng.

I hvarje toniskt eller öfvertoniskt system utgöra således grundtreklängen, dominant- och underdominant-treklängerna de tre hufvudtreklängerna, emedan de innefatta systemets alla 7 toner. Dessa toner äro uti toniska systemet partialtoner uti en tonisk kläng, uti öfvertoniska systemet deremot underpartialtoner uti en öfvertonisk kläng.

Vidare innehåller hvarje toniskt system 3 toniska (dur-) och 2 öfvertoniska (moll-) treklänger, men deremot hvarje öfvertoniskt system 3 öfvertoniska (moll-) och 2 toniska (dur-) treklänger.

Af de öfvertoniska $\underline{e}$ - och $\underline{h}$ -systemernas tersföljder kunna vi lätt genom oktavförflyttningar finna de respektive diatoniska tonskalorna, hvilka äro följande:

uti öfvertoniska $\underline{e}$ -systemet: $\underline{e}_1 - \underline{f}_1 - \underline{g}_1 - \underline{a}_1 - \underline{h}_1 - \underline{c}^0 - \underline{d}^0 - \underline{e}^0$, öfvert. grundton = $\underline{h}^4$
 $\underline{48}^{-1} \quad \underline{45}^{-1} \quad \underline{40}^{-1} \quad \underline{36}^{-1} \quad \underline{32}^{-1} \quad \underline{30}^{-1} \quad \underline{27}^{-1} \quad \underline{24}^{-1} \quad \underline{1}$
 „ „ „ $\underline{h}$ -systemet: $\underline{h}_1 - \underline{c}^0 - \underline{d}^0 - \underline{e}^0 - \sharp \underline{f}^0 - \underline{g}^0 - \underline{a}^0 - \underline{h}^0$, „ „ „ „ = $\sharp \underline{f}^3$
 $\underline{48}^{-1} \quad \underline{45}^{-1} \quad \underline{40}^{-1} \quad \underline{36}^{-1} \quad \underline{32}^{-1} \quad \underline{30}^{-1} \quad \underline{27}^{-1} \quad \underline{24}^{-1} \quad \underline{1}$

Häraf finna vi, att de öfvertoniska tonskalorna äro endast inverterade toniska tonskalor (se pag. 36); ty de förras tonsteg, från höger till venster räknadt, hafva sins emellan samma intervaller, som de sednares (från venster till höger).

Låta vi den öfvertoniska $\underline{e}$ -tonskalan börja med tonen $\underline{a}^0$ i stället för $\underline{e}^0$, så erhålla vi följande tonskala:

$$\underline{a}_1 - \underline{h}_1 - \underline{c}^0 - \underline{d}^0 - \underline{e}^0 - \underline{f}^0 - \underline{g}^0 - \underline{a}^0,$$

som är den vanliga $\underline{a}$ -mollskalan i *nedstigande*; och låta vi den öfvertoniska $\underline{h}$ -tonskalan börja med tonen $\underline{e}^1$ i stället för $\underline{h}^0$, så erhålla vi följande tonskala:

$$\underline{e}^0 - \sharp \underline{f}^0 - \underline{g}^0 - \underline{a}^0 - \underline{h}^0 - \underline{c}^1 - \underline{d}^1 - \underline{e}^1,$$

som är den vanliga $\underline{e}$ -mollskalan i *nedstigande*.

Jemföra vi treklängerna uti toniska $\underline{c}$ - och öfvertoniska $\underline{e}$ -systemerna med hvarandra, så finna vi, att treklängerna $\underline{f}_1 (+)$, $\underline{e}^0 (-)$, $\underline{c}^0 (+)$, $\underline{h}^0 (-)$ äro gemensamma för båda systemerna, men att treklängen $\underline{g}^0 (+)$ förekommer endast uti det förra och treklängen $\underline{a}_1 (-)$ endast uti det sednare systemet.

Jemföra vi deremot toniska $\underline{c}$ - och öfvertoniska $\underline{h}$ -systemerna med hvarandra, så finna vi, att treklängerna $\underline{e}^0 (-)$, $\underline{c}^0 (+)$, $\underline{h}^0 (-)$, $\underline{g}^0 (+)$ äro gemensamma, men att treklängen $\underline{f}_1 (+)$ förekommer endast uti det förra och treklängen $\sharp \underline{f}^1 (-)$ endast uti det sednare systemet.

Häraf följer således, att vi kunna öfvergå från det toniska $\underline{c}$ -systemet ($\underline{c}$ -dur) till det öfvertoniska $\underline{e}$ -systemet ($\underline{a}$ -moll) genom att förändra $\underline{d}^0$ till $\underline{d}^1$, och till det öfvertoniska $\underline{h}$ -systemet ($\underline{e}$ -moll) genom att förändra $\underline{f}^0$ till $\sharp \underline{f}^0$.

Utom de fem konsonerande treklanger uti det toniska *c*-systemet förekomma äfven två andra, nemligen:

$$\begin{array}{ccc} d^0 - f^0 - a^0 & (\text{på andra tonsteget}), \\ 27 & 32 & 40 \\ h^0 - d^1 - f^1 & (,, \text{ sjunde } ,,). \\ 45 & 54 & 64 \end{array}$$

Båda dessa treklanger är *dissonerande*, emedan de innehålla dissonerande intervaller; ty uti den förra treklangen förekomma pyth. lilla tersen (27 : 32) och en med ett syntoniskt komma förminskad ren qvint (27 : 40), uti den sednare pyth. lilla tersen (54 : 64 = 27 : 32) och den i allmänhet så kallade förminskade qvinten (45 : 64).

Treklangen $d^0 - f^0 - a^0$ vilja vi derföre benämna *syntoniskt förminskade treklangen*; deremot är treklangen $h^0 - d^1 - f^1$ den vanliga *förminskade treklangen*.

Lägger man tonen f^1 till dominant-treklangen $g^0 (+)$ uti det toniska *c*-systemet, så upp kommer den så kallade *dominant-fyrklangen* $g^0 - h^0 - d^1 - f^1$, hvars naturliga upplösning är $g^0 - c^1 - e^1$. Denna upplösning kallar man äfven en *naturlig kadens* till skillnad från den så kallade *bedrägliga* (afbrutna) *kadensen* (cadenza per inganno), hvilken sednare består deruti, att dominant-fyrklangen upplöses till någon annan treklang (tonisk eller öfvertonisk), såsom t. ex. till öfvertoniska treklangen $e^1 (-)$. Harmoniläran förklarar dock ej tillräckligt orsaken, hvarföre denna upplösning är oväntad, ty den fäster ej uppmärksamheten på den förändring, som i syntoniskt hänseende måste föregå en sådan upplösning och som antyder en i sjelfva verket *förmedlande* och *syntonisk modulation*.

Om vi alltså vilja upplösa dominant-fyrklangen $g^0 - h^0 - d^1 - f^1$ till treklangen $a^0 - c^1 - e^1$, som är grundtreklangen uti det öfvertoniska *e*-systemet, så kuuna vi lätt finna denna förmedlande modulation genom att noga observera den förändring, som fyrklangen måste undergå, på det att densamma skall kunna tillhöra det öfvertoniska *e*-systemet. Denna förändring består nemligen helt enkelt deruti, att tonen d^1 , som tillhör det toniska *c*-systemet, nedsänkes med ett syntoniskt komma till $\underline{d^1}$, hvilken sednare deremot tillhör det öfvertoniska *e*-systemet.

Upplösningen till $\underline{e^1} (-)$ försiggår således på följande sätt:

$$\begin{array}{c} g^0 - h^0 - d^1 - f^1 \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ g^0 - h^0 - \underline{d^1} - f^1 \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ a^0 - c^1 - e^1; \end{array}$$

deremot är den *naturliga* upplösningen till toniska treklangen $g^0 - c^1 - \underline{e^1}$:

$$\begin{array}{c}
 g^0 - \underline{h^0} - \underline{d^1} - f^1 \\
 | \quad | \quad \diagup \quad \diagdown \\
 g^0 - \underline{c^1} - \underline{e^1}
 \end{array}$$

Men emedan tonen $\underline{d^1}$ i förra fallet öfvergått till $\underline{d^1}$, så har också fyrklängen derigenom på samma gång förändrat sin *harmoniska* betydelse; ty fyrklängen $g^0 - \underline{h^0} - \underline{d^1} - f^1$ är ej nu mera någon dominant-fyrklang, utan i stället en fyrklang på underseptiman eller ledtonen *) uti det öfvertoniska $\underline{e}$ -systemet.

Samma förhållande äger rum, om vi låta dominant-fyrklängen **) $\underline{h_1} - \underline{d^0} - f^0 - \underline{a^0}$ uti det öfvertoniska $\underline{e}$ -systemet, hvars naturliga upplösning är $c^0 - \underline{e^0} - \underline{a^0}$, fortskrida till toniska treklängen $c^0 - \underline{e^0} - g^0$, hvilken sednare upplösning är oväntad och utgör således en begräglig kadens. Ty en syntonisk modulation måste först inträda, derigenom att tonen $\underline{d^0}$ öfvergår till $\underline{d^0}$, hvilken sednare tillhör det toniska c -systemet. ■

Upplösningen till $c^0 (+)$ försiggår således på följande sätt:

$$\begin{array}{c}
 \underline{h_1} - \underline{d^0} - f^0 - \underline{a^0} \\
 | \quad | \quad \diagup \quad \diagdown \\
 \underline{h_1} - \underline{d^0} - f^0 - \underline{a^0} \\
 | \quad | \quad \diagup \quad \diagdown \\
 c^0 - \underline{e^0} - g^0
 \end{array} ;$$

deremot är den naturliga upplösningen till öfvertoniska treklängen $c^0 - \underline{e^0} - \underline{a^0}$:

$$\begin{array}{c}
 \underline{h_1} - \underline{d^0} - f^0 - \underline{a^0} \\
 \diagdown \quad \diagup \quad | \quad | \\
 c^0 - \underline{e^0} - \underline{a^0}
 \end{array}$$

I förra fallet har fyrklängens harmoniska betydelse blifvit förändrad, derigenom att den samma, efter att först hafva varit dominant-fyrklang uti det öfvertoniska $\underline{e}$ -systemet, öfvergått till en fyrklang på septiman (ledtonen) uti det toniska c -systemet.

Hittills hafva vi endast funnit förvandtskapen emellan de konsonerande treklängerna inom toniska c -systemet. Vi skola nu utsträcka vår undersökning äfven till treklanger, hvilka tillhöra *olika* toniska och öfvertoniska systemer.

*) I öfvertoniska systemet räkna vi, i motsats till det toniska systemet, såväl ledtonen som ock fyrklängens toner *nedåt*.

**) I toniska systemet ligger dominanten en quint *öfver* och underdominanten en quint *under* grundtonen; i öfvertoniska systemet deremot anse vi dominanten ligga en quint *under* och underdominanten en quint *öfver* grundtonen.

Om vi derföre till en början ytterligare utvidga gränserna för den i det föregående uppställda ters-serie, som innefattar de konsonerande treklanger uti toniska c -, öfvertoniska e - och h -systemerna, med en *stor ters nedåt* och med en *liten ters uppåt*, så erhålla vi derigenom en följd af omvexlande toniska och öfvertoniska treklanger, som innefattar ända till 5 på hvarandra följande systemer, nemligen toniska c -, g - och f - samt öfvertoniska e - och h -systemerna.

Den utvidgade ters-serien är alltså:

$$\begin{array}{c} \overline{b}h_2 - \overline{d}_1 - \overline{f}_1 - \overline{a}_1 - \overline{c}^0 - \overline{e}^0 - \overline{g}^0 - \overline{h}^0 - \overline{d}^1 - \sharp\overline{f}^1 - \overline{a}^1 = \\ \text{ton. } f. \qquad \qquad \qquad \text{ton. } c. \qquad \qquad \qquad \text{ton. } g. \\ = \overline{b}h_2 (+) - \overline{a}_1 (-) - \overline{f}_1 (+) - \overline{e}^0 (-) - \overline{c}^0 (+) - \overline{h}^0 (-) - \overline{g}^0 (+) - \sharp\overline{f}^1 (-) - \overline{d}^1 (+). \\ \text{öfverton. } e. \qquad \qquad \qquad \text{öfverton. } h. \end{array}$$

Kombinera vi dessa systemers treklanger med hvarandra två och två, så uppkomma 36 kombinationer. Af dessa äro 26 af den beskaffenhet, att de hvar för sig innehålla två, till endast *ett* tonsystem hörande, konsonerande treklanger; följaktligen erhålla vi inga andra värden på intensiteten än dem, som vi förut hafva funnit (se pag. 62). Men emedan de 10 återstående kombinationerna innehålla treklanger, hvilka äro *gränstreklanger* uti två och två af ofvannämnda 5 tonsystemer, så måste värdena på intensiteten blifva mindre, och i följe deraf förvandtskapen allt svagare, ju längre dessa treklanger äro från hvarandra aflägsna.

Sammanställa vi nu dessa 36 kombinationer, fördelade uti tvenne grupper och ordnade efter värdena på intensiteten, så erhålles följande ordningsföljd:

1) Treklanger uti ett tonsystem.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{b}h_2 (+) + \overline{a}_1 (-) \\ \overline{f}_1 (+) + \overline{e}^0 (-) \\ \overline{c}^0 (+) + \overline{h}^0 (-) \\ \overline{g}^0 (+) + \sharp\overline{f}^1 (-) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{b}h_2 (+) + \overline{f}_1 (+) \\ \overline{a}_1 (-) + \overline{e}^0 (-) \\ \overline{f}_1 (+) + \overline{c}^0 (+) \\ \overline{e}^0 (-) + \overline{h}^0 (-) \\ \overline{c}^0 (+) + \overline{g}^0 (+) \\ \overline{h}^0 (-) + \sharp\overline{f}^1 (-) \\ \overline{g}^0 (+) + \overline{d}^1 (+) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{a_1}(-) + \underline{f_1}(+) \\ \underline{e^0}(-) + \underline{c^0}(+) \\ \underline{h^0}(-) + \underline{g^0}(+) \\ \sharp \underline{f^1}(-) + \underline{d^1}(+) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) - \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} {}^b h_2(+) + \underline{e^0}(-) \\ \underline{f_1}(+) + \underline{h^0}(-) \\ \underline{c^0}(+) + \sharp \underline{f^1}(-) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} \right) + \frac{1}{6^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} {}^b h_2(+) + \underline{c^0}(+) \\ \underline{a_1}(-) + \underline{h^0}(-) \\ \underline{f_1}(+) + \underline{g^0}(+) \\ \underline{e^0}(-) + \sharp \underline{f^1}(-) \\ \underline{c^0}(+) + \underline{d^1}(+) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{a_1}(-) + \underline{c^0}(+) \\ \underline{e^0}(-) + \underline{g^0}(+) \\ \underline{h^0}(-) + \underline{d^1}(+) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} \right) - \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p} \right)$$

2) Gränstreklanger uti två tonsystemer.

Underdominant-treklanger

$$\left. \begin{array}{l} \text{i ton. } f \text{ och öfvert. } \underline{e} = {}^b h_2(+) + \underline{h^0}(-) \\ \text{,, ton. } c \text{ ,, öfvert. } \underline{h} = \underline{f_1}(+) + \sharp \underline{f^1}(-) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{27^p} \right) + \frac{1}{18^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p} \right)$$

Underdominant- och dominant-treklanger

$$\left. \begin{array}{l} \text{i ton. } f \text{ och ton. } c = {}^b h_2(+) + \underline{g^0}(+) \\ \text{,, öfvert. } \underline{e} \text{ ,, öfvert. } \underline{h} = \underline{a_1}(-) + \sharp \underline{f^1}(-) \\ \text{,, ton. } c \text{ ,, ton. } g = \underline{f_1}(+) + \underline{d^1}(+) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{27^p} \right)$$

Dominant-treklanger

$$\left. \begin{array}{l} \text{i öfvert. } \underline{e} \text{ och ton. } c = \underline{a_1}(-) + \underline{g^0}(+) \\ \text{,, öfvert. } \underline{h} \text{ ,, ton. } g = \underline{e^0}(-) + \underline{d^1}(+) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{27^p} \right) - \frac{1}{4^p} \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p} \right)$$

Underdominant-treklanger

$$\left. \begin{array}{l} \text{i ton. } f \text{ och öfvert. } \underline{h} = {}^b h_2(+) + \sharp \underline{f^1}(-) \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{16^p} + \frac{1}{81^p} \right) + \frac{1}{54^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p} \right)$$

Underdominant- och dominant-treklanger

$$\text{i ton. } f \text{ och ton. } g = {}^b h_2 (+) + d^1 (+) \left\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{16^p} + \frac{1}{81^p} \right)$$

Dominant-treklanger

$$\text{i öfvert. } e \text{ och ton. } g = \underline{a}_1 (-) + d^1 (+) \left\} = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{16^p} + \frac{1}{81^p} \right) - \frac{1}{8^p} \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p} \right)$$

Anm. Intensiteten hos gränstreklangerna hafva vi beräknat enligt samma princip som förut, d. v. s. att treklangernas beståndsdelar blifvit betraktade såsom partial- eller underpartialtoner, allt eftersom treklangerna äro på samma gång toniska eller öfvertoniska. Är deremot den ena treklangen tonisk och den andra öfvertonisk, så blifver intensiteten densamma, antingen man utgår från deras gemensamma toniska eller öfvertoniska grundton, emedan dessa grundtoner äro i detta fall symmetriskt belägna å ömse sidor om treklangerna.

De konsonerande treklanger, hvilkas intensitet vi i det föregående beräknat, äro egentligen af den beskaffenhet, att de tillhöra *en och samma* ters-serie. Antaga vi deremot, att de tillhöra *olika* ters-serier, så uppkomma nya kombinationer, af hvilka vi vilja endast såsom exempel framställa följande:

$$c^0 (+) + \underline{e}^0 (+) = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} \right)$$

$$g^0 (-) + c^0 (+) = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} \right) - \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p} \right)$$

$$c^0 (+) + \#d^1 (-) = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{15^p} \right) + \frac{1}{10^p} \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{9^p} \right)$$

$$c^0 (+) + \underline{h}^0 (+) = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{15^p} \right)$$

$$c^0 (-) + c^0 (+) = \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} \right) \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{15^p} \right) - \frac{1}{4^p} \left(\frac{1}{8^p} - \frac{1}{15^p} \right).$$

Den sista af dessa kombinationer har en särskilt betydelse, emedan densamma förekommer uti följande ters-serier:

$$\overline{f_1 - {}^b a_1 - c^0 - e^0 - g^0 - h^0 - d^1} = c^0 (-) + c^0 (+) + \underline{h}^0 (-) + g^0 (+)$$

$$\overline{{}^b h_2 - {}^b d_1 - f_1 - {}^b a_1 - c^0 - e^0 - g^0} = f_1 (-) + {}^b d_1 (+) + c^0 (-) + c^0 (+),$$

af hvilka den förra är toniska *c*-systemet med en öfvertonisk underdominant-treklang, $c^0 (-)$, och den sednare öfvertoniska *c*-systemet med en tonisk underdominant-treklang, $c^0 (+)$.

HAUPTMANN kallar det förra systemet en *moll-dur tonart*, hvars tonskala är:

$$c^0 - d^0 - \underline{e^0} - f^0 - g^0 - {}^b\bar{a}^0 - \bar{h}^0 - c^1;$$

det sednare systemet innefattar deremot den i allmänhet så kallade instrumentala *f-mollskalan*:

$$f_1 - g_1 - {}^b\bar{a}_1 - {}^b\bar{h}_1 - c^0 - {}^b\bar{d}^0 - \underline{e^0} - f^0.$$

Slutligen vilja vi blott tillägga, att den princip, som vi konsekvent hafva fullföljt vid bestämmandet af förvandtskapen emellan de konsonerande treklangerne, äfven kan utsträckas till förvandtskapen emellan de toniska och öfvertoniska systemerna samt till de dissonerande ackorderna och deras upplösning.
